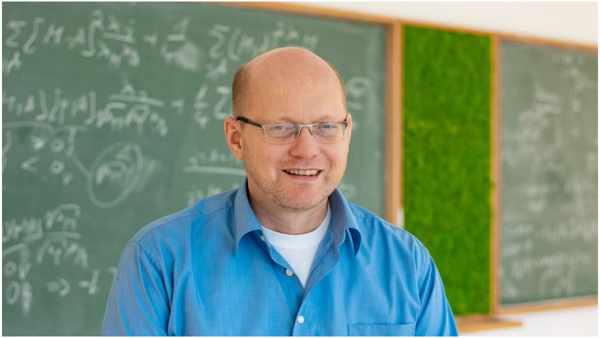
Laudatio für Burkhard Wilking

Ursula Hamenstädt

April 22, 2022


KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT 1798-1867
PROFESSOR DER MATHEMATIK



Burkhard Wilking, * 30.11.1970, Vechta

Promotion 1998:
Group actions on manifolds of nonnegative curvature and generalized Biberbach theorems

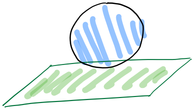
Postdoc und Assistant Professor an der University of Pennsylvania 1999-2002

Seit 2002 ist Burkhard Wilking Professor an der Universität Münster

Auszeichnungen: Leibniz Preis, Mitglied in der Akademie der Wissenschaften Leopoldina, der Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften und Künste, eingeladener Sprecher beim ICM 2006

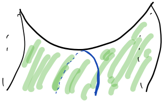
Burkhard Wilking arbeitet über Differentialgeometrie. Seine Arbeiten untersuchen insbesondere Mannigfaltigkeiten nichtnegativer Krümmung und den Ricci-Fluss zur Erzielung von geometrischen Strukturerkenntnissen

Die Krümmung einer *Fläche*:



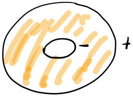
Nicht-negative Krümmung:

Die Oberfläche des Balls berührt die Ebene aber schneidet sie nicht



Negative Krümmung:

Eine Ebene, die den Sattel berührt, schneidet ihn auch



Krümmung existiert auch für höher dimensionale Räume. Zum Beispiel ist die *Sphäre*

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$$

positiv gekrümmt (ihre Krümmung ist konstant 1)

Welche Beispiele kompakter positiv gekrümmter Räume gibt es? Können sie *klassifiziert* werden?

Eine solche Klassifikation ist im *topologischen Sinn* gemeint.

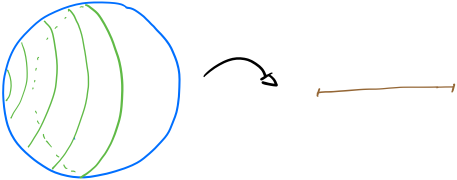
Theorem (Wilking 2001)

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung ≥ 1 *und Durchmesser* $\pi/2$ *ist homöomorph zu einer Sphäre oder lokal isometrisch zu einem CROSS.*

Dieses Ergebnis vervollständigt frühere Arbeiten von Gromoll und Grove mit einem überraschenden Argument, welches auf *Morse-Theorie* beruht.
Nämlich, die Parität des *Index* einer geschlossenen Geodätischen auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit, deren Geodätischen alle geschlossen sind, hängt nur von der Parität der Dimension ab.

Topologische Klassifikation von geometrischen Strukturen mit unorthodoxen, geometrischen Methoden

"Fibration"



Hopf-Faserung: $S^{2n+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z| = 1 \}$

$\longrightarrow \mathbb{C}P^n = \{ \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \} / \sim$

$z \sim y$ falls $z = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$

Theorem (Lytchak-Wilking 2016)

Vollständige Klassifikation von Riemannschen Blätterungen auf topologischen Sphären:

1. *Eine Blätterung, die durch einen isometrischen Fluss für eine Metrik entsteht.*
2. *Generische Fasern, die diffeomorph zu $\mathbb{R}P^3$ oder S^3 sind.*
3. *Ein S^7-Bündel über S^8.*

Die Arbeit vervollständigt frühere Arbeiten von Gromoll und Grove mit neuen Methoden.
Prinzipielle Idee: Untersuchung der sogenannten *Holonomie* der Blätterung und Reduktion auf den Fall von Riemannschen Submersionen.
Werkzeug: Die Kohomologie des Raumes der Blätter.

Signifikanter Fortschritt in Richtung einer Klassifikation positiv gekümmer Mannigfaltigkeiten großer Dimension

Der *Symmetrie-Rang* einer Mannigfaltigkeit ist der *Rang* der Isometriegruppe der Mannigfaltigkeit. Dieser Rang ist die maximale Dimension eines Torus, der isometrisch auf der Mannigfaltigkeit wirkt.

Theorem (Wilking 2003)

Wenn $n = \dim(M) \geq 10$ *und der Symmetrie-Rang von* M *mindestens* $\frac{1}{4}n + 1$ *ist, dann ist* M *homöomorph zu* S^n *oder* $\mathbb{H}P^{n/4}$ *oder homotopie-äquivalent zu* $\mathbb{C}P^{n/2}$.

Originelle Idee zur Übersetzung von geometrischer Information in topologische Information: Man zeige, dass die Inklusion einer totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit $N^{n-k} \to M^n$ $(n-2k+1)$-zusammenhängend ist.

Ein Morse-theoretisches Argument auf dem Raum der Wege, die in $N^{n-k} \subset M^n$ beginnen und enden.

Tiefes geometrisches Verständnis, welches in fundamentale strukturelle Erkenntnis übersetzt wird, unter Benutzung "einfacher" Methoden aus Geometrie und Topologie.

Der *Symmetrie-Grad* ist die Dimension der Isometriegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Theorem (Wilking 2006)

Eine einfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit M^n *positiver Krümung von Symmetriegrad* $\geq 2n - 6$ *is tangential homotopie-äquivalent zu einem Rang 1 Symmetrischen Raum oder isometrisch zu einem homogenen Raum positiver Krümmung.*

Die Arbeit entwickelt tiefe Strukturergebnisse über kompakte Lie-Gruppen, die auf positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten wirken, und entdeckt topologische Obstruktionen für Isotropiegruppen.

Originelle, anwendungsorientierte Struktur-Einsichten in den Ricci-Fluss

Der *Ricci-Fluss* ist die Lösung einer parabolischen, voll nicht-linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2\mathrm{Ric}(t),$$

die unter geeigneten Bedingungen einen lokalen Fluss auf dem Raum der Riemannschen Metriken auf einer Mannigfaltigkeit M erzeugt.

Dieser Fluss wurde von Hamilton eingeführt und von Perelman zur Lösung der sogenannten Geometrisierungsvermutung für 3-Mannigfaltigkeiten benutzt.

Fundamentale Idee ist, den Fluss mittels Invarianten zu studieren, die sich kontrolliert unter dem Fluss ändern.

Der Krümmungsoperator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine nicht-numerische Invariante.

Theorem (Böhm–Wilking 2008)

Kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit 2-positivem Krümmungsoperator sind diffeomorph zu sphärischen Raumformen.

Die fundamentale Einsicht besteht in dem Auffinden einer äquivarianten linearen Selbst-Abbildung auf einen geschickt gewählten Vektorraum, der zu einem Skalarprodukt assoziiert ist, welche eine solche invariante Krümmungsbedingung definiert (überprüfbar mit einer einfachen ODE).
Dies erzeugt eine Familie von invarianten Kegeln, welche den invarianten Kegel von 2-positiven Krümmungsoperatoren mit dem Kegel der Vielfachen der Identität verbindet. Ein Konvergenzargument liefert das Ergebnis.

Unerwartete Einsicht in das Lösungsverhalten des Ricci-Flusses mit einfachen geometrischen Methoden

Theorem (Cabezas-Rivas, Wilking 2015)

Kurz-Zeit Existenz von Lösungen für die Ricci-Fluss Gleichung auf offenen, nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten nicht-negativer komplexer Schnittkrümmung ohne weitere Annahme an die Krümmung, und vollständiges geometrisches Verständnis für spontane uniforme Krümmungsschranken unter dem Fluss mit Hilfe einer optimalen Wachstumsbedingung an das Volumen.

Zur Herleitung der Aussage wird der folgende geometrische Struktursatz benutzt:

Theorem (Cabezas-Rivas, Wilking 2015)

Eine vollständige einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit nicht-negativer komplexer Krümmung spaltet isometrisch als Produkt $M = \Sigma \times F$, wobei Σ die k-dimensionale Seele von M und F diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Diese Aussage wird für eine Klebekonstruktion benutzt, die es erlaubt, die Kurzzeit-Existenz für den Ricci-Fluß auf die Existenz auf kompakten Mannigfaltigkeiten zurückzuführen.

Brilliante Umgehung analytischer Schwierigkeiten durch Rückführung auf tiefe Erkenntnis über die zugrundeliegende geometrische Struktur

Synergie mit dem analytischen Ansatz

Theorem (Bamler, Cabezas-Rivas, Wilking 2019)

Verallgemeinerung von fast allen bekannten nicht-negativen Krümmungsbedingungen, die invariant under dem Ricci-Fluß sind, zu weniger restriktiven Schranken, die für kurze Zeit kontrolliert bleiben. Anwendungen sind Glättungsresultate, die eine Klassifikation sogenannter nicht-kollabierter Mannigfaltigkeiten mit fast nicht-negativem Krümmungsoperator einschließen.

Diese Ergebnisse werden durch eine Kombination von geometrischen und analytischen Methoden erzielt.


oberwolfach