Fritz Noether's Indextheorie von 1921 bis heute

Hermann Schulz-Baldes
Erlangen, Juli 2014

Warum der Vortrag?

- Hörsaalbenennung
- berührt vom Schicksal
- beeindruckt von wissenschaftlicher Leistung

Werdegang

- Geburt in Erlangen 1884, Abitur 1903
- Militärdienst 1903-1904
- Studium in Erlangen und München
- 1909 Doktorarbeit bei A. Voss (und A. Sommerfeld)
Über rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen
- Nahe Zusammenarbeit mit A. Sommerfeld und F. Klein. Im Buch *Über die Theorie des Kreisels* wird F. Noether erwähnt als Vorbereiter der Veröffentlichung und Autor von Ergänzungen.
- *Pro venia legendi* in Karlsruhe 1911, dann dort Privatdozent.
- Verletzt im 1. Weltkrieg, ausgezeichnet mit Eisernem Kreuz
- 1921 bei Siemens in Berlin, seit 1922 Professor in Breslau

Übergang

- Salonkommunist - Sympathisant moderner sowjetischer Ideen
- Studentische Beschwerden 26.4. und 24.8.1933 (jüdischer Linker)
- Dann Petition auf Emeritierung mit Pension (bis zur Emigration)
- Professor in Tomsk ab Ende 1933
- Letztes Treffen mit Emmy und anderen Geschwistern 1934

Abgang

- 1935 Alexandroff's Ansprache zur posthum Ehrung von Emmy
- 1936 Reise nach Oslo zum Internationalen Mathematik Kongress
  Treffen mit Trotzki in Oslo?
- 22.11.1937 Verhaftung (Hintergrund Beziehung zu Trotzkisten?)
- 28.4.1938 Brief von A. Einstein an sowjetischen Außenminister
- Verurteilt zu 25 Jahren Novosibirsk, 8.10.1938
  Anklagepunkte: Spionage und Sabotage
- Zum Tode verurteilt anti-sowjetische Agitation am 8.9.1941
- Hingerichtet am 10.9.1941 in Orel (Oryol)
  (südlich von Moskau, besetzt von Nazis 8.10.1941)
- Grab unbekannt

Rehabilitation

- 1985 : Special Issue IEOT editiert von I. Gohberg
- Lebensgeschichte beschrieben von seinem Sohn Gottfried Noether
- 1989 Brief der Sowjetischen Botschaft

EMBASSY OF THE
UNION OF SOVIET SOCIALIST REPUBLICS
1125 - 16TH ST. N.W.
WASHINGTON, D. C. 20036

DR. H.D. NOETHER

May 12, 1989

Dear Dr. Noether,

I write to inform you that on December 22, 1988 the Plenum of the USSR Supreme Court passed a decree No. 308-88 (see enclosure) in which it determined that your father, Professor Fritz M.Noether, had been convicted on groundless charges and voided his sentence, thus fully rehabilitating him.

On October 23, 1938 Professor Noether was found guilty of allegedly spying for Germany and committing acts of sabotage and was sentenced in Novosibirsk to 25 years of imprisonment. He served time in different prisons.

On September 8, 1941 the Military Collegium of the USSR Supreme Court sentenced Professor F.Noether to death on the accusation of engaging in anti-Soviet agitation. He was shot in Orel on September 10, 1941. His burial place is unknown.

Please, accept my deepest sympathy although I understand that no words can alleviate your pain.

Wissenschaftliche Arbeiten

- München: Zusammenarbeit mit F. Klein und A. Sommerfeld
- 1909, 1910: Herglotz-Noether Theorem
  (Einschränkung euklidischer Bewegungen Born'scher Körper
  in der speziellen Relativitätstheorie)
- Akkustische Filter
- Turbulenz
- Hydrodynamik schwach reibender Flüssigkeiten
- 1926: Einwände gegen Heisenberg's Dissertation
  (über Hydrodynamik)
- Noether's Eigenbezeichnung: angewandter Mathematiker

Noether's Arbeit über singuläre Integraloperatoren und Indextheorie

Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.

Von

Fritz Noether in Karlsruhe i. B.

Die folgende Mitteilung beschäftigt sich mit linearen Integralgleichungen:

$$(1) \qquad a(s)\varphi(s) + \int_{-\pi}^{+\pi} K(s\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

deren Kern $K(s\,t)$ einen einfachen Pol an der Stelle $t = s$ hat, bei Ausschluß dieser Stelle aber quadratisch integrabel ist. Auf solche Integralgleichungen führen beispielsweise Randwertaufgaben von der Art: Eine Potentialfunktion u für das Innere oder Äußere einer geschlossenen Randkurve zu bestimmen, die am Rand einer Bedingung

$$(2) \qquad -a(s)\frac{\partial u}{\partial n} + b(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = \pi f(s)$$

genügt, wie sie in der Theorie der Gezeiten[1]) und, wie ich an anderer Stelle zeigen will, in der Hydrodynamik schwach reibender Flüssigkeiten vorkommt, durch Ansatz der Lösung mittels einfacher oder Doppelbelegung

Fredholm's Integraloperatoren (1900)

Sei $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong [-\pi, \pi)$

Stetiger Integralkern $k : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$

Fredholm'scher Integraloperator:

$$(K\varphi)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} ds\; k(t,s)\,\varphi(s) \qquad \varphi \in C(\mathbb{S}^1)$$

Fredholm'sche Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(t) - (K\varphi)(t) \;=\; h(t)$$

mit Inhomogenität $h \in C(\mathbb{S}^1)$
Adjungierte homogene Gleichung

$$\psi(t) - (K^*\psi)(t) \;=\; 0 \qquad (K^*\psi)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} ds\; k(s,t)\,\psi(s)$$

Fredholm Alternative

ENTWEDER

$\mathrm{Ker}(\mathbf{1}-K)$ trivial und eindeutige Lösung $\varphi = (\mathbf{1}-K)^{-1}(h)$

ODER:

beide homogene Gleichungen haben Lösungen

$$\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{1}-K)) \;=\; \mathrm{codim}(\mathrm{Ran}(\mathbf{1}-K)) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{1}-K^*))$$

Dann Lösungen nur, wenn $h \in \mathrm{Ran}(\mathbf{1}-K) = \mathrm{Ker}(\mathbf{1}-K^*)^\perp$

KEINE ÜBERRASCHUNG:

$A \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{C}) \implies \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A^*))$

ENTWEDER: $Ax = b$ eindeutige Lösung $x \in \mathbb{C}^N$ für $b \in \mathbb{C}^N$

ODER: Lösungen nur, wenn $b \in \mathrm{Ran}(A) = \mathrm{Ker}(A^*)^\perp$

Hilberträume und kompakte Operatoren

Verallgemeinerungen:

Fredholm: Alternative auch, falls $|t-s|^{\alpha}k(s,t)$ stetig für $\alpha < 1$

Hilbert-Räume (Lebesgue): Es reicht quadratintegrables k

Neue Konzepte:

1916-1918: F. Riesz' Theorie kompakter (Integral-) Operatoren

(Bilder schwach konvergente Folgen sind stark konvergent)

Spektraltheorie kompakter Operatoren auf normierten Räumen

Hilbert's Beitrag zum Heidelberger Kongress 1904

Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie.

Von

D. Hilbert aus Göttingen.

Unter einer „Integralgleichung" verstehe ich eine Gleichung von der Gestalt

$$f(s) = \int_a^b K(s,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

oder

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Im Falle eines symmetrischen „Kernes" $K(s,\sigma)$ steht — wie ich in zwei Mitteilungen in den Göttinger Nachrichten dieses Jahres ausgeführt habe — die Theorie der Integralgleichungen im engsten Zusammenhange mit der „quadratischen Integralform"

$$Q(x) = \int_a^b\int_a^b K(s,\sigma)\,x(s)\,x(\sigma)\,ds\,d\sigma,$$

deren Theorie als das transzendente Analogon zu der bekannten algebraischen Theorie der quadratischen Form mit n Veränderlichen aufzufassen ist. Den besonderen Arten quadratischer Formen, z. B. denjenigen mit nicht verschwindender Di...

Singuläre Integraloperatoren

Definiert auf Hölder Funktionen durch Cauchy'schen Prinzipalwert

$$(T\varphi)(t) \;=\; b(t)\varphi(t) \;+\; \frac{a(t)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds \;\cot(\tfrac{t-s}{2})\,\varphi(s) \;+\; (K\varphi)(t)$$

wobei $a, b, \varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ Hölder stetig und $a^2(t) + b^2(t) \;>\; 0$

Also $T = b + iaH + K'$ mit Hilbert-Transformation

$$(H\varphi)(t) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{2\pi i}\,\varphi(s)\;\big(\cot(\tfrac{s-t}{2}) + i\big) \;=\; \int_{\mathbb{S}^1} \frac{d\zeta}{\pi i}\,\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - e^{it}}$$

Singuläre Integralgleichung zweiter Art

$$T\varphi \;=\; h$$

Hilbert: rein analytisches Interesse, später viele Anwendungen

Zurückführung auf Fredholm'sche Gleichung

Adjungierter Operator

$$(T^*\psi)(t) \; = \; b(t)\psi(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds\; a(s)\; \cot\left(\tfrac{t-s}{2}\right) \psi(s) + (K^*\psi)(t)$$

Fakt nach Rechnung: T^*T Fredholm'scher Integraloperator

Löse zuerst Fredholm Gleichung zweiter Art

$$T^*T\varphi \; = \; T^*h \qquad \Longleftrightarrow \qquad T^*(T\varphi - h) \; = \; 0$$

Hilbert's Fehler: $\mathrm{Ker}(T) = \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Ker}(T^*) = \{0\} \Longrightarrow T\varphi = h$

Aber: T ist kein Fredholm'scher Operator $\mathbf{1} - K$

Tatsächlich: $\mathrm{Ker}(T^*)$ nicht-trivial $\Longrightarrow$ mehr Lösungen!

Noether's Hauptsätze

Ersatz für Fredholm Alternative bei singulären Integralgleichungen

Theorem

(Erster Noether Satz) $\mathrm{Ker}(T)$ *und* $\mathrm{Ker}(T^*)$ *endlich dimensional*

Theorem

(Zweiter Noether Satz)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(T) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ker}(T^*)) \\ &= 2\,\mathrm{Wind}(a+ib) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ds}{2\pi i} \log(a+ib)\end{aligned}$$

Theorem

(Dritter Noether Satz) $T\varphi = h$ *hat Lösung* $\iff h \perp \mathrm{Ker}(T^*)$

Literatur und Terminologie

1930-1960 Tiflis Schule (Buch von Muskhelishvili)

- T Fredholm Operator $\iff T = \mathbf{1} - K$ mit K kompakt
- T Noether Operator $\iff \mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Ker}(T^*)$ endlich dimensional (und Bild abgeschlossen). Dann Noether Index

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \dim(\mathrm{Ker}(T)) \;-\; \dim(\mathrm{Ker}(T^*))$$

- Ein Noether Operator mit $\mathrm{Ind}(T) = 0$ ist ein Fredholm Operator

Analog in vielen Büchern (z.B. P. Lax oder R. Kress),

aber in den meisten nicht...

Homogenes Riemann-Hilbert Problem

Inauguraldissertation 1851, aufgegriffen von Hilbert 1904

Für $a, b : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ Hölder stetig, finde holomorphe Funktion $f = u + iv$ auf $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, stetig auf $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{S}^1$ mit

$$au + bv = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{S}^1$$

Umschreiben:

$$(a - ib)f + (a + ib)\overline{f} = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{S}^1$$

Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$

$$f(z) = \overline{f}(z^{-1}) = \overline{f(\overline{z}^{-1})} \qquad \text{für } |z| > 1$$

Somit: Sprungproblem zwischen inneren und äußeren Limites

$$(a - ib)f_- + (a + ib)f_+ = 0 \qquad \text{auf } \mathbb{S}^1$$

Sokhotzki-Plemelj Formel (1868, 1908)

Wenn $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ Hölder stetig, so ist sein Cauchy Integral

$$f(z) \;=\; \int_{\mathbb{S}^1} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$$

analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$ und Hölder auf $\mathbb{C}$ mit Limeswerten

$$f_\pm(z) \;=\; \int_{\mathbb{S}^1} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \mp \tfrac{1}{2}\,\varphi(z) \;=\; \tfrac{1}{2}\, H\varphi(z) \mp \tfrac{1}{2}\varphi(z) \qquad z \in \mathbb{S}^1$$

Einsetzen:

$$(a - ib)f_- + (a + ib)f_+ \;=\; aH\varphi - ib\varphi$$

Theorem

Cauchy-Integral ist Bijektion zwischen Ker$(T = b + iaH)$
und Lösungen des homogenen Riemann-Hilbert Sprungproblems:

$$(a - ib)f_- + (a + ib)f_+ \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

Lösung des Sprungproblems

$$(a - ib)f_- + (a + ib)f_+ \;=\; 0 \iff f_+ \;=\; g\, f_- \quad \text{mit } g \;=\; -\frac{a - ib}{a + ib}$$
$$\iff \log(f_+) \;=\; \log(g) + \log(f_-)$$

Nach Plemelj:

$$\log(f(z)) \;=\; \int_{\mathbb{S}^1} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\log(g(\zeta))}{\zeta - z}$$

Problem falls $n = \mathrm{Wind}(g) \neq 0$ **!** Modifikation:

$$F(z) \;=\; \exp\left(\int_{\mathbb{S}^1} \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\log(\zeta^{-n} g(\zeta))}{\zeta - z}\right)$$

Dann

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = 1 \qquad \text{und} \qquad F_+(z) = F_-(z) z^{-n} g(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{S}^1$$

Beweis des zweiten Noether Satzes

Kanonische Lösung des homogenen Riemann-Hilbert Problems:

$$f_0(z) \;=\; \begin{cases} F(z) & |z| < 1 \\ F(z)z^{-n} & |z| > 1 \end{cases}$$

für die dann gilt

$$(f_0)_+(z) \;=\; g(z)(f_0)_- \;\text{ for } z \in \mathbb{S}^1 \qquad \lim_{z\to\infty} z^n f_0(z) \;=\; 1$$

Beliebige Lösung $f(z) = p(z)f_0(z)$ mit Polynom p vom Grad $n-1$

$\Longrightarrow\; \dim\left(\mathrm{Ker}(b+iaH)\right) = \max\{n,0\}$

Analog: $\dim\left(\mathrm{Ker}(b-iaH)\right) = \max\{-n,0\}$

Mit Cauchy-Integral-Bijektion:

$$\dim\left(\mathrm{Ker}(T)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(T^*)\right) \;=\; n \;=\; 2\,\mathrm{Wind}(a+ib)$$

Noether-Gohberg-Krein Index Theorem

Hilbert Transformation erfüllt $H^2 = \mathbf{1}$ und $H^* = H$

Unitärer und selbstadjungierter Operator auf $L^2(\mathbb{S}^1)$

$\mathrm{Spec}(H) = \{-1, 1\}$ und $H = \Pi - (\mathbf{1} - \Pi)$ mit Hardy Projektion Π

Nun ist $T = b + iaH$ Summe von Toeplitz- und Hankel-Ops:

$$\begin{aligned} T \; &= \Pi(b + ia)\Pi \; + \; (\mathbf{1} - \Pi)(b - ia)(\mathbf{1} - \Pi) \\ &\qquad + \; \Pi(b - ia)(\mathbf{1} - \Pi) \; + \; (\mathbf{1} - \Pi)(b + ia)\Pi \end{aligned}$$

Beide Letzteren kompakt auf $L^2(\mathbb{S}^1)$ und somit:

$$\mathrm{Ind}(T) \; = \; \mathrm{Ind}(\Pi(b + ia)\Pi) \; + \; \mathrm{Ind}((\mathbf{1} - \Pi)(b - ia)(\mathbf{1} - \Pi))$$

Theorem

Für invertierbares $f = b + ia$ gilt

$$\mathrm{Wind}(f) \; = \; \mathrm{Ind}(\Pi f \Pi)$$

Verallgemeinerte Index Theoreme

Dies war das erste Index-Theorem der Form

$$\text{topologischer Index} \;=\; \text{analytischer Index}$$

Funktionalanalytische Untersuchungen (seit ca. 1940):
Dieudonné, Atkinson, Calderon, Gohberg-Krein, etc.

Hirzebruch-Riemann-Roch Theorem

Atiyah-Singer Index Theorem

Anwendungen: QFT Anomalien, Phasen-Etikette in Stat. Physik

Index-Abbildung in der K-Theorie und KK-Theorie

Alain Connes' nicht-kommutative Index-Theorie

(basierend auf Fredholm Modulen, wieso nicht Noether Modulen?)

Darstellung im Fourier Raum

Multiplikationsoperator $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{itn} \in C(\mathbb{S}^1)$ auf $L^2(\mathbb{S}^1)$

Diskrete Fourier Transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{S}^1) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

$\mathcal{F} e^{it} \mathcal{F}^* = S$ bilateraler Shift auf $\ell^2(\mathbb{Z})$

Hardy Projektion $\Pi = \mathcal{F}\Pi\mathcal{F}^*$ auf $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{Z})$

Translationsinvarianter Operator (ohne Einschränkung unitär)

$$U \;=\; \mathcal{F} f \mathcal{F}^* \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n \, S^n$$

Theorem

f stetig differenzierbar, invertierbar $\Longrightarrow \Pi U \Pi$ Noether Operator

$$\mathrm{Ind}(\Pi U \Pi) \;=\; Wind(f) \;=\; \int f^{-1} df$$

Nicht-kommutative Verallgemeinerung

$(\Omega, \mathbb{Z}, \mathbf{P})$ kompaktes ergodisches dynamisches System

Stark stetig Familie $\omega \in \Omega \mapsto U_\omega$ von Operatoren auf $\ell^2(\mathbb{Z})$

Kovarianzrelation:

$$S^n U_\omega S^{-n} \;=\; U_{n \cdot \omega}$$

Theorem

Sei U_ω invertierbar und $[X, U_\omega]$ ein beschränkter Operator wobei X unbeschränkter Ortsoperator auf $\ell^2(\mathbb{Z})$

$\Longrightarrow \Pi U_\omega \Pi$ *Noether Operator mit* $\mathbf{P}$*-fast sicheren Index*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(\Pi U_\omega \Pi) &= \int \mathbf{P}(d\omega)\, \langle 0 | (U_\omega)^{-1} [X, U_\omega] | 0 \rangle \\ &= i\, \mathcal{T}(U^{-1} \nabla U) \end{aligned}$$

fast sicherer Index $=$ nicht-kommutative Windungszahl

Höhere Dimension d ungerade

$S_1, \ldots, S_d$ Shift-Operatoren auf $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$

$X_1, \ldots, X_d$ Komponenten des Ortsoperators auf $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$

Stark stetig Familie $\omega \in \Omega \mapsto U_\omega$ kovariant, falls

$$S_j U_\omega (S_j)^{-1} \;=\; U_{e_j \cdot \omega} \qquad j = 1, \ldots, d$$

Dirac Phase $F = \frac{D}{|D|}$ zu Dirac Operator $D = \sum_{j=1}^d X_j \otimes \sigma_j$,

wobei $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ Darstellung von Clifford C_d. Setze $\Pi = \frac{1}{2}(F + \mathbf{1})$

Theorem (Prodan, Schulz-Baldes 2014)

$\Pi U_\omega \Pi$ *Noether Operator mit fast sicherem Index*

$$\mathrm{Ch}_d(U) = \frac{(i\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d!!} \sum_{\rho \in S_d} (-1)^\rho \int \mathbf{P}(d\omega)\, \mathrm{Tr}\, \langle 0| \left(\prod_{j=1}^d U_\omega^{-1} [X_{\rho_j}, U_\omega] \right) |0\rangle$$

Auf dem Torus $\mathbb{T}^d$

Nach Fourier Transformation $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d)$

$$\mathrm{Ch}_d(U) = \frac{(\frac{1}{2}(d-1))!}{d!} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\frac{d+1}{2}} \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{Tr}\left(\left[U^{-1} dU\right]^d\right)$$

Lemma (geometrischer Identität zur Simplizes)

Seien $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ *mit* $\mathbf{x}_{d+1} = \mathbf{0}$. *Dann:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\, \mathrm{Tr}_\sigma \left(\prod_{i=1}^{d} (\widehat{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}}) \cdot \sigma \right)$$

$$= \frac{2^d (-i\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d!!} \sum_{\rho \in S_d} (-1)^\rho \prod_{i=1}^{d} x_{i,\rho_i}$$

wobei $x_{i,j}$ *die* j*te Komponente von* $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,d})$ *ist.*

Danke für Ihr Kommen und Zuhören!

Funktionalanalysis (hier nur Hilbert-Räume $\mathcal{H}$)

Definition $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beschränkter Noether Operator

$\iff \exists$ Pseudo-Inverses $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $ST - \mathbf{1}$, $TS - \mathbf{1}$ kompakt

$\iff T\mathcal{H}$ closed, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$, $\dim(\mathrm{Ker}(T^*)) < \infty$

Dann: $\mathrm{Ind}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) - \dim(\mathrm{Ran}(T))$ Noether Index

Theorem

$\mathrm{Ind}(T) = \mathrm{Ind}(T + K)$ *kompakt stabil*
Homotopieinvarianz $t \mapsto \mathrm{Ind}(T_t)$ *konstant für norm-stetige Pfade*

Theorem

Pseudo-Inverse mit $(ST - \mathbf{1})^n, (TS - \mathbf{1})^n$ *spurklasse für* $n \geq 1$

$$\mathrm{Ind}(T) \;=\; \mathrm{Tr}\big((ST - \mathbf{1})^n\big) \;-\; \mathrm{Tr}\big((TS - \mathbf{1})^n\big)$$