ERLANGER BAUSTEINE ZUR FRÄNKISCHEN HEIMATFORSCHUNG

SONDERDRUCK

29
1982

Beiträge Erlanger Mathematiker zur Entwicklung der Geometrie

von

Gerhard Vogt

Einleitung
I Kurze Lebensbeschreibungen
1. Karl Feuerbach
2. Karl von Staudt
3. Felix Klein
4. Paul Gordan
5. Max Noether
6. Emmy Noether
II Beiträge der Erlanger Mathematiker zur Entwicklung der Geometrie
1. Allgemeiner Überblick
2. Karl Feuerbach
2.1 Der Feuerbach-Kreis
2.2 Die Feuerbach-Kugel
2.3 Tetraederkoordinaten
3. Karl von Staudt: Projektive Geometrie
4. Felix Klein
4.1 Nichteuklidische Geometrien
4.2 Topologie und Kleinsche Flasche
4.3 Das Erlanger Programm
5. Paul Gordan: Invariantentheorie
6. Max Noether: Algebraische Geometrie
7. Emmy Noether: Der Noether-Ring
Literaturverzeichnis, Bildnachweis

Einleitung

In den 1975 zuerst in der DDR erschienenen „Biographien bedeutender Mathematiker" von Hans Wußing und Wolfgang Arnold findet sich neben dem Bild der 1882 in Erlangen geborenen Emmy Noether und ihrer Lebensbeschreibung auch ein Foto des Erlanger Kollegienhauses. Wußing weist damit auf die Idylle der Universitätsstadt Erlangen zu Ende des 19. Jahrhunderts hin und deutet an, in welchem Milieu Emmy Noether aufwuchs. Über ihren Vater und das Wirken weiterer bekannter Mathematiker an der Erlanger alma mater schreibt er:

> „Der Vater Max Noether war seit 1875 Professor der Mathematik in Erlangen und hatte mit einer Vielzahl hervorragender Arbeiten zur Invariantentheorie und zum Aufbau der algebraischen Geometrie als selbständiger mathematischer Disziplin beigetragen. Erlangen besaß – nicht zuletzt durch das Wirken von Max Noether – seit der Mitte des 19. Jahrhunderts einen guten Ruf als Pflegestätte der Mathematik. Hier hatte Karl von Staudt gewirkt, der bedeutende synthetische Geometer. In Erlangen hatte Felix Klein seine unter der Bezeichnung ‚Erlanger Programm' bekanntge-

wordene Antrittsvorlesung zur gruppentheoretischen Klassifizierung der Geometrie gehalten. Durch das Wirken von Paul Gordan, des ‚Königs der Invarianten', hatte Erlangen seinen Ruf noch mehren können."

Soweit also Wußing über die Erlanger Mathematiker.

In dem nachfolgenden Aufsatz möchte ich auf die Arbeiten der hier genannten Mathematiker aufmerksam machen, darüberhinaus aber noch auf Karl Feuerbach hinweisen, der als Professor der Mathematik am Erlanger Gymnasium tätig war und nach dem der sog. Feuerbach-Kreis benannt ist. Ein kurzes Wort soll dann noch der in Erlangen geborenen Mathematikerin Emmy Noether gewidmet sein. Der Schwerpunkt ihrer Arbeiten liegt zwar nicht wie bei den anderen genannten Mathematikern auf der Geometrie, doch ist sie in letzter Zeit durch die Namensgebung eines Erlanger Gymnasiums als einzige Erlanger Mathematikerin etwas deutlicher in das Bewußtsein breiterer Bevölkerungskreise gerückt worden und so möchte ich hier wenigstens andeuten, mit welchem Teilgebiet der Mathematik sie sich beschäftigt hat.

In kurzen Übersichten sollen zunächst die Lebensläufe dieser sechs Mathematiker dargestellt und Hinweise gegeben werden, wo im Erlanger Stadtbild noch Spuren von ihnen zu finden sind. In einem zweiten Teil dieses Aufsatzes will ich dann versuchen, ihre Arbeiten in den größeren Zusammenhang der Mathematik zu stellen und damit ihre Bedeutung für die Geschichte dieser Wissenschaft verständlich zu machen.

I Kurze Lebensbeschreibungen

1. Karl Feuerbach (1800–1834)

Die Familie Feuerbach hat viele berühmte Persönlichkeiten hervorgebracht: den Staatsrechtler Anselm Feuerbach, den Philosophen Ludwig Feuerbach, den Maler Anselm Feuerbach. Dabei ist aber wenig bekannt, daß auch der Mathematiker Karl Feuerbach in diese Familie gehört. Im Gegensatz zu den drei anderen genannten Feuerbachs ist aber über sein Leben nur schwer etwas zu erfahren. In mathematischen Werken, in denen der nach ihm benannte Feuerbach-Kreis beschrieben wird, finden sich meist nur kurze biographische Hinweise, wie Geburts- und Sterbedaten, sowie die Bemerkung, daß Feuerbach Professor am Gymnasium in Erlangen war. Genaueres über sein tragisches Leben erfährt man nur am Rande in allgemeinen Schriften über die Familie Feuerbach, insbesondere über den Vater Paul Johann Anselm Feuerbach.[1] Erst in neuerer Zeit ist auch von mathematischer Seite auf Leben und Werk Karl Feuerbachs eingegangen worden.[2]

Hier sollen nur die wichtigsten Stationen seines kurzen Lebens genannt werden: Am 30. Mai 1800 wurde Karl Wilhelm Feuerbach in Jena als 2. Sohn des später berühmten Juristen Paul Johann Anselm Feuerbach geboren. Der bekannte Philosoph Ludwig Feuerbach ist ein jüngerer Bruder, der Maler Anselm Feuerbach ein Neffe des Mathematikers. Nach dem Besuch des Ansbacher Gymnasiums begann Karl Feuerbach 1817 zusammen mit seinem

---

1) Gustav Radbruch: Paul Johann Anselm Feuerbach, 2. Auflage, Göttingen 1957 (im Wesentlichen aufbauend auf Henriette Feuerbach, Anselm Feuerbachs Leben, Briefe, Gedichte 1853, S. 15 ff) S. 144–146 und 168–171.

Theodor Spoerri, Genie und Krankheit, Basel 1952, über Karl Feuerbach S. 47–53.

2) Moritz Cantor: Karl Wilhelm Feuerbach, in Sitzungsbericht der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1910 (25).

Rudolf Fritsch: Zum Feuerbachschen Kreis, Konstanz 1975.

Volker Hönig: Gedanken über Karl Feuerbach und sein mathematisches Werk. Abgedruckt in „Das Feuerbachhaus", Heft 1, 1979.

Karl Feuerbach (1800–1834).

älteren Bruder Anselm, dem späteren Altertumskundler, das Studium in Erlangen. Zwar hatte Karl Feuerbach zunächst dem Wunsch des Vaters entsprechend ein Jurastudium begonnen, doch wechselte er bald zur Mathematik über. Die beiden Brüder gehörten zu den Gründungsmitgliedern der Erlanger Burschenschaft,[3] traten aber bald auf Befehl des Vaters wieder aus.

1820 wechselte Karl Feuerbach auf die Universität Freiburg über, wo inzwischen der ihm von Ansbach her bekannte Mathematik-Professor Butzengeiger eine Professur erhalten hatte. 1822 erschien dann Feuerbachs erste Schrift „Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks ...“ in Nürnberg, die den Satz vom Feuerbach-Kreis enthält. Wohl auf Grund dieser Schrift bekam Feuerbach 1823 eine Stelle als Professor für Mathematik am Gymnasium Fridericianum in Erlangen.

3) Ernst Höhne: Die Bubenreuther, Erlangen 1936, Teil I S. 28 und Teil II S. 17/18.

Am 13. Mai 1824 wurde Karl Feuerbach in Erlangen wegen angeblicher revolutionärer Umtriebe verhaftet und zusammen mit 19 anderen jungen Männern nach München gebracht. Insgesamt 14 Monate blieb er in Haft, verfiel dabei in eine Psychose und unternahm zwei Selbstmordversuche. Erst im Juni 1825 wurde er wieder entlassen und bekam 1826 eine neue Anstellung am Gymnasium in Hof. Hier (bzw. im Elternhaus in Ansbach) stellte er nun seine zweite, bereits in der Münchener Haft begonnene Schrift, das Manuskript zur „Analysis der dreieckigen Pyramide", fertig (Hinweis in der Zeitschrift „Isis" 1826, Druckschrift 1827 in Kommission bei Riegel und Wiesner in Nürnberg). Darin entwickelt Feuerbach die Tetraederkoordinaten und verallgemeinert den Feuerbach-Kreis in einem Spezialfall zur Feuerbach-Kugel. Auf den Inhalt dieser Schriften gehe ich im 2. Teil dieser Arbeit näher ein.

Am 4. März 1827 erlitt Karl Feuerbach einen neuerlichen Gemütsanfall, kam zur psychiatrischen Behandlung nach Erlangen und hielt sich anschließend bei der Familie in Ansbach auf. Kurzfristig konnte er noch einmal die Lehrtätigkeit in Erlangen aufnehmen, wurde aber bald wegen Gemütskrankheit in den Ruhestand versetzt und ist am 12. März 1834 in Erlangen gestorben.

Nach Unterlagen des Stadtarchivs Erlangen wurde er am 15. 3. 1834 in Erlangen beigesetzt, jedoch ist sein Grab heute nicht mehr auffindbar. Auch das Erlanger Wohnhaus Feuerbachs kann nicht mehr festgestellt werden, so daß außer gelegentlichen Hinweisen auf seine Anstellung als Mathematik-Professor am Gymnasium Fridericianum in der Stadt Erlangen nichts mehr an ihn erinnert.

2. *Karl von Staudt (1798–1867)*

Eine ausführliche Beschreibung des Lebens und Werkes von Karl Georg Christian von Staudt hat Max Noether 1901 für die Festschrift der Universität Erlangen zur Feier des 80. Geburtstages des Prinzregenten Luitpold von Bayern verfaßt. Weitere Biographien erschienen 1953 und 1960 von Gerhard Böhmer und Joseph Hofmann.[4]

V. Staudt stammt aus einem alten Patriziergeschlecht aus Rothenburg o. d. T., wo er am 24. 1. 1798 geboren wurde (sein Geburtshaus, das Staudtsche Stammhaus in der Herrengasse in Rothenburg o. d. T., befindet sich noch heute im Familienbesitz). Er besuchte zunächst die Lateinschule in Rothenburg o. d. T., danach vier Jahre das Ansbacher Gymnasium. Hier wurde er von dem Mathematik-Professor Butzengeiger unterrichtet, der auch in dem 2 Jahre jüngeren Karl Feuerbach die Liebe zur Mathematik weckte.[5] In seinem Studium bei Gauß in Göttingen wurde Staudt vor allem in Astronomie und Zahlentheorie eingeführt; der Geometrie, der er sein Lebenswerk widmete, wandte er sich erst später zu. Nach seiner Studienzeit promovierte Staudt 1822 an der Erlanger Universität auf Grund seiner astronomischen Arbeiten und erhielt dann eine Stelle als Gymnasiallehrer in Würzburg, wo

---

4) Max Noether: Zur Erinnerung an Karl Georg Christian von Staudt, abgedruckt in den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung 32 (1923), S. 97–119.

Gerhard Böhmer: Professor Dr. Karl Georg Christian von Staudt, Rothenburg o. d. T., 1953.

Joseph E. Hofmann: Karl Georg Christian von Staudt. In: Lebensläufe aus Franken, 7. Reihe, Bd. 6, Würzburg 1960, S. 536–548.

5) Es ist anzunehmen, daß Feuerbach und Staudt von ihrer Ansbacher Gymnasialzeit her persönlich bekannt waren. Böhmer (Anmerkung 4, S. 38) erwähnt Briefe Feuerbachs an Staudt. Auch gibt Feuerbach in einer seiner Schriften an, daß ein Satz über das Dreieck (Radius des Feuerbach-Kreises gleich halber Radius des Umkreises) von Karl von Staudt entdeckt worden sei (s. Anmerkung 36 des math. Teils zu Feuerbach, S. 568).

Karl von Staudt (1798–1867).

er nebenbei als Privatdozent an der Universität tätig wurde. Seit 1827 wirkte er am Polytechnikum in Nürnberg und bekam 1835 die Professur in Erlangen.

Ein Mitbewerber Staudts um die Erlanger Professur war übrigens Martin Ohm, der jüngere Bruder des Physikers Georg Simon Ohm. Er hatte schon einige Jahre als Privatdozent der Mathematik in seiner Geburtsstadt Erlangen gewirkt und später eine Professur an der Universität Berlin erhalten.[6] Über die Anstellung und das Einkommen Staudts als Professor der Erlanger Universität berichtet Max Noether:[7]

6) Martin Ohm war Mitte des vorigen Jahrhunderts auf Grund seiner mathematischen Lehrbücher weithin bekannt. Bourbaki (Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971, S. 36) schreibt, daß er es war, der 1822 die ersten Versuche unternahm, die Arithmetik mit der Analysis zu verbinden, während andere Mathematiker diese Arbeit erst nach 1860 weiterführten. Auch Johannes Tropfke erwähnt in seiner 7bändigen „Geschichte der Elementarmathematik" (2. Auflage Berlin und Leipzig 1921–1924) wiederholt die Arbeiten Ohms. Da es sich aber bei allen diesen Schriften um Lehrbücher

„Was für Staudt entschied, war nicht nur der Ruf des ausgezeichneten Lehrers, der sowohl einen engeren Kreis für rein-wissenschaftliche Lehre und Forschung zu interessieren und anzuleiten und im anregenden klarsten Vortrage auch auf ein großes Auditorium zu wirken verstehe, sondern vor allem der, für die zukünftige allgemeinere Wirksamkeit wichtige Umstand, daß er als Schüler von Gauß sowohl die reine, als auch die angewandte Mathematik beherrsche, wie durch seine astronomischen Rechnungen und durch Gauß' Zeugnis bewiesen sei. Auch die Charaktereigenschaften des ‚vir bonus', und die moralische Verpflichtung, einem Manne, der sich schon längst nach einem seiner Begabung angemessenen akademischen Wirkungskreise gesehnt, zu einer freien Entfaltung zu verhelfen, spielten eine Rolle; und so konnte Staudt unter dem 23. August 1835 auf den 1. Oktober zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Universität Erlangen ernannt werden. Staudt war am Ziele seiner Wünsche; demgegenüber trat, da auch seine Vermögensverhältnisse nicht ungünstig waren, der Umstand zurück, daß er an Gehalt sich schlechter als in Nürnberg stellte: auf 1200 fl., wovon noch 100 fl. auf Naturalbezug gerechnet wurden. Die Honorare kamen ja dabei, trotz sehr guten Besuches der allgemeinen Kollegien Staudts, nicht besonders in Betracht, da zudem die Beheizung der Hörsäle damals von den Professoren, von denen nur den Senatsmitgliedern ein Holzbezug statutenmäßig zukam, selbst bestritten werden mußte. Übrigens wurde sein Gehalt 1852 und später um etwas aufgebessert, zuletzt 1861 auf 1600 fl."

An der Erlanger Universität wirkte Staudt nun 33 Jahre lang bis zu seinem Tode im Jahre 1867. 1847 erschien in Nürnberg die „Geometrie der Lage", 1856, 1857 und 1860 folgten die drei Hefte „Beiträge zur Geometrie der Lage". Felix Klein, der 5 Jahre nach dem Tode Staudts nach Erlangen kam, schreibt über seinen Vorvorgänger:

„In der Stille und Einfachheit der damaligen Erlanger Zustände, die vom großen Leben nicht berührt wurden, fand Staudt die Ruhe und Abgeschlossenheit, die zum ungestörten Ausspinnen der eigenen Gedankenwelt nötig ist. In größter Zurückgezogenheit und Gleichmäßigkeit, die sich auch in seinem äußeren Wesen ausprägte – als ich 1872 ihm auf seinem Lehrstuhl folgte, erzählte man mir noch, er habe ein Gesicht gehabt, wie eine Ziffer –, vollendete hier Staudt seine fundamentalen Werke, die ausgereiften Früchte eines langen gedankenvollen Lebens."[8)]

Noch 1832, also in der Nürnberger Zeit, hatte sich v. Staudt mit Jeanette Drechsler vermählt. Aus der Ehe gingen zwei Kinder hervor: Eduard von Staudt, zuletzt Forstmeister in Regensburg, und Mathilde, die spätere Gattin des damaligen Erlanger Bürgermeisters Dr. August Papellier.

Am 1. 6. 1867 starb Karl von Staudt in Erlangen. In seiner Grabrede nannte ihn der Universitätsprediger Professor Gottfried Thomasius in Anspielung auf seine Bedeutung für die Begründung der projektiven Geometrie den modernen „Euklid".[9)]

In Erlangen erinnert an Karl von Staudt in erster Linie der mit einer bronzenen Namenstafel verzierte Grabstein nördlich der Friedhofskirche auf dem Neustädter Friedhof, daneben eine Gedenktafel an seinem Sterbehaus Obere Karlstraße 14 und schließlich wurde 1978 eine Straße im Südosten der Stadt nach ihm benannt.

---

der Mathematik und keine Forschungsarbeiten handelt, bin ich in diesem Aufsatz nicht weiter darauf eingegangen. Es handelt sich um folgende, teilweise in mehreren Auflagen herausgegebenen Werke:

1. Reine Mathematik, Berlin 1819.
2. Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, 3 Bände, Berlin 1822, 2. Auflage 1828–51.
3. Die reine Elementarmathematik, Berlin 1825–39.
4. Lehrbuch für den gesamten mathematischen Elementarunterricht, 3. Auflage 1842.

7) s. Anmerkung 4, S. 108/109.

8) s. Literaturverzeichnis (6), S. 132/133.

9) s. Anmerkung 4, S. 98.

3. Felix Klein (1849–1925)

Als „einflußreichster Mathematiker in dem Zeitalter von 1875 bis 1914" wird Felix Klein in dem Mathematiker-Lexikon von Herbert Meschkowski bezeichnet.[10] „Klein war die beherrschende Figur dieser Epoche, berufen auf breiter Bahn zu führen und die Bahnen der Entwicklung zu bestimmen" schreibt Courant über ihn.[11] Klein war dabei nicht nur ein international anerkannter Forscher, sondern zugleich eine Persönlichkeit, die dem mathematischen Unterricht an Schulen und Hochschulen entscheidende Impulse gegeben hat. Entsprechend der Bedeutung Felix Kleins verzichte ich hier darauf Literaturangaben über ihn zusammenzustellen, sondern verweise nur auf die Literaturverzeichnisse zu Felix Klein in den bekann-

10) s. Literaturangabe (8), S. 160.

11) Richard Courant: Gedächtnisrede für Felix Klein, gehalten am 31. 7. 1925 in Göttingen. In: Die Naturwissenschaften, 13. Jg. (1925) S. 765–772, Zitat auf S. 765.

ten Konversationslexika bzw. den Mathematiker-Biographien von Meschkowski und Wußing/Arnold.[12]

Der Name Felix Kleins ist in erster Linie mit der Universität Göttingen verbunden, wo er von 1886 bis 1913 als Professor wirkte. Jedoch hat Klein auch drei Jahre den Erlanger Lehrstuhl für Mathematik innegehabt und eine seiner wichtigsten Arbeiten ist unter dem Namen „Erlanger Programm" bekannt geworden. Deshalb dürfen wir ihn getrost auch zu den Erlanger Mathematikern rechnen.

Felix Klein wurde am 25. 4. 1849 in Düsseldorf als Sohn eines westfälischen Justizbeamten geboren, begann mit 16 ½ Jahren das Studium in Bonn und erwarb bereits mit 19 Jahren die Doktorwürde. Als 22jähriger habilitierte er 1871 in Göttingen und erhielt schon 1872 einen Ruf nach Erlangen. Über Kleins Start in Erlangen schreibt Courant:[13] „Aus dem blühenden mathematischen Leben in Göttingen sieht er sich plötzlich in eine wissenschaftliche Einöde versetzt, ohne Anregungen, ohne die notwendigsten Arbeitsmittel, ohne Studenten. Von seinen zwei Zuhörern bleibt der eine nach der ersten Stunde, der andere nicht viel später weg." Doch blieb das nicht lange so. Durch den plötzlichen Tod von Chlebsch in Göttingen wechselten dessen Schüler nach Erlangen, um ihre Ausbildung bei Felix Klein fortzusetzen. Und tatsächlich führte er bis 1875 sechs von ihnen zur Promotion.

Trotzdem blieb Klein nicht lange in Erlangen. Schon 1875 nahm er einen Ruf an die Technische Hochschule in München an, ging 1880 nach Leipzig und kehrte 1886 nach Göttingen zurück, wo er auch noch nach seiner Emeritierung Vorlesungen vor einem kleinen Kreis ausgewählter Zuhörer hielt. In den letzten Jahren in Göttingen entstanden seine bekannten „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert", die wiederholt neu aufgelegt wurden, zuletzt 1979 im Reprint-Verfahren. Am 22. 6. 1925 ist Klein in Göttingen gestorben.

Bereits durch seine Arbeit „Über die sogenannte Nichteuklidische Geometrie", die 1871 in den Mathematischen Annalen erschien, war Klein in Mathematikerkreisen weltbekannt geworden. 1873 und 1874 folgten zwei weitere Veröffentlichungen zum selben Thema. Im Erlanger Programm von 1872 war es Klein gelungen, die Bedeutung des Gruppenbegriffs für die Einteilung der Geometrie aufzuzeigen. Später arbeitete er auf dem Gebiete der von Bernhard Riemann entwickelten geometrischen Funktionentheorie und der Theorie der automorphen Funktionen. Weitere bedeutende Veröffentlichungen über das Ikosaeder, die Auflösung von Gleichungen 5. Grades, zur Funktionentheorie und über die Theorie des Kreisels folgten. In dem folgenden mathematischen Teil will ich mich auf die geometrischen Arbeiten Kleins beschränken, und dabei insbesondere das „Erlanger Programm" erläutern.

Neben der wissenschaftlichen Tätigkeit zeichnete sich Felix Klein durch seine erfolgreichen Bemühungen um die Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts sowie der Verbesserung der Lehrerbildung aus (u. a. ist die Einführung der Infinitesimalrechnung in den Gymnasien größtenteils sein Verdienst). Auch an der Gründung der „Internationalen mathematischen Unterrichtskommission", deren erster Präsident er von 1908 bis 1910 wurde, war er maßgeblich beteiligt. In „Biographien berühmter Mathematiker", herausgegeben von Wußing/Arnold, schreibt Kasdorf über ihn:[14]

„Wir verdanken Felix Klein nicht nur eine Reihe bedeutender Erkenntnisse in der Mathematik, sondern auch wertvolle Einsichten in deren Wesen. Er hat sie uns als eine lebendige Wissenschaft

12) s. Literaturangaben (8) und (9).

13) Richard Courant: Felix Klein. In: Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung 34 (1925) S. 197–213, Zitat S. 200.

14) s. Literaturangabe (9), S. 477.

dargestellt, die es zu ‚erleben' und nicht nur formal zu begreifen gilt und die man ständig anwenden und aus der Anwendung heraus bereichern soll."

In Erlangen wurde 1959 eine Straße im Vorort Bruck nach Felix Klein benannt. Seine Wohnung hatte er bis 1873 in der Hauptstraße 19, dann Richard-Wagner-Straße 4.

4. Paul Gordan (1837–1912)

Leben und Werk Paul Gordans sind in den Mathematischen Annalen 1913 in einem kurzen Gedenken[15] und 1914 in einem ausführlichen Nachruf von Max Noether beschrieben worden.[16]

15) Mathematische Annalen 73 (1913) S. 321/322.

16) Max Noether: Paul Gordan. In: Mathematische Annalen 75 (1914) S. 1–41.

Geboren wurde Paul Gordan am 27. 4. 1837 in Breslau. Er entstammt einer angesehenen Kaufmannsfamilie, die in Breslau und Berlin Pelzhandel und Bankgeschäfte durchführte. Dementsprechend sollte er zunächst die kaufmännische Laufbahn einschlagen und in das väterliche Geschäft eintreten. Jedoch begann er neben seiner kaufmännischen Ausbildung bald Mathematik-Studien zu betreiben, teils privat, teils schon an der Universität. 1857 holte er dann das Abitur nach und nun folgte das reguläre Studium in Breslau, Königsberg und Berlin, das er 1862 mit dem Doktordiplom abschloß. Danach ging Gordan nach Göttingen und Gießen, wo er sich 1863 habilitierte.

In Gießen verfaßte er 1866 gemeinsam mit Chlebsch seine bekannte Arbeit zur „Theorie der Abelschen Funktionen". Dann folgte die für die Invariantentheorie bedeutsame sog. Chlebsch-Gordansche Reihenentwicklung.[17] Darauf aufbauend gelangte Gordan 1868 zum Höhepunkt seiner invariantentheoretischen Leistung, dem sog. Gordanschen Endlichkeitstheorem,[18] dessen Beweis er in späteren Arbeiten noch wesentlich vereinfachen konnte.

1865 war Gordan in Gießen zum außerordentlichen Professor ernannt worden und 1874 erfolgte die Berufung an die Universität Erlangen, zunächst auf das neugegründete Extraordinariat. 1875 erhielt Gordan dann nach dem Weggang Felix Kleins das Erlanger Ordinariat, während Max Noether Gordans Nachfolger auf dem Extraordinariat wurde.

1869 hatte sich Gordan mit der Heidelberger Professorentochter Sophie Deurer vermählt. Aus der Ehe ging ein Sohn hervor, der als höherer Beamter im Nahrungsmittelwesen in Danzig tätig wurde.

In Erlangen beschäftigte sich Gordan zusammen mit Felix Klein mit der Gleichungstheorie der Gleichungen 5ten, 6ten und 7ten Grades. 1893 entwickelte er im Anschluß an Hilbert und Hurwitz einen vereinfachten Beweis für die Transzendenz von e und π.[19] In seinem eigentlichen Arbeitsgebiet, der Invariantentheorie, blieb Gordan bis zu seinem Tode führend. Neben seiner eigenen forschenden Tätigkeit ist hier auch noch seine Mitarbeit an den Mathematischen Annalen zu erwähnen, wo er vor allem Arbeiten invariantentheoretischen Inhalts begutachtete.

Von der Lehrtätigkeit Gordans sind die in zwei Bänden erschienenen „Vorlesungen über Invariantentheorie" zu nennen. Im 1. Band beschäftigt sich Gordan dabei mit Determinanten, im 2. Band mit den binären Formen. Ein 3. Band der „Vorlesungen", der den ternären Formen gewidmet werden sollte, war lange in Vorbereitung, kam jedoch nicht mehr zur Ausführung. Die Manuskripte Gordans wurden nach seinem Tod der Universitätsbibliothek übergeben.[20]

38 Jahre hat Gordan in Erlangen verbracht. Er wohnte zunächst in der Hauptstraße 32, dann von 1890 bis 1912 im Hause Goethestraße 4, wo eine Tafel an ihn erinnert. 1910 trat er von seinem Lehramt zurück, hielt aber noch weiter Vorlesungen. Am 21. 12. 1912 verstarb er und wurde auf dem Neustädter Friedhof in Erlangen beigesetzt. Sein Grab befindet sich im nordwestlichen Teil des Friedhofs.

---

17) s. Anmerkung 16, S. 9 ff.

18) s. Mathematischer Teil, Paul Gordan: Invariantentheorie.

19) Paul Gordan: Transzendenz von e und π. Mathematische Annalen 43 (1893), S. 222–224.

20) s. Anmerkung 16, S. 19.

5. Max Noether (1844–1921)

Biografische Hinweise zu Max Noether finden sich in den Mathematischen Annalen in einer kurzen Nachricht über seinen Tod[21], in dem ausführlichen Nachruf, den Alexander von Brill seinem Freund und Mitarbeiter 1923 in den Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung gewidmet hat[22], und, wiederum in den Mathematischen Annalen, dem Nachruf seiner italienischen Freunde[23]. In dem Nachruf Brills findet sich neben der Lebensbeschreibung und dem Bild Noethers vor allem eine ausführliche Würdigung seiner mathematischen Schriften, dem Nachruf der Italiener ist außerdem ein Verzeichnis der gesamten Schriften Noethers beigefügt.

21) Mathematische Annalen 85 (1922), vor S. 1.

22) A. Brill/Max Noether. In: Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 32 (1923), S. 211–233.

23) Castelnuovo, Enriques, Severi: Max Noether. In: Mathematische Annalen 93 (1925), S. 161–181 (italienisch).

Max Noether wurde am 24. 9. 1844 in Mannheim geboren. Er entstammt einer durch Generationen im Eisenhandel tätigen Kaufmannsfamilie. Mit 14 Jahren erkrankte er an der damals noch unbekannten spinalen Kinderlähmung, die die Lähmung eines Beines zur Folge hatte. In den folgenden Jahren, in denen er überhaupt nicht laufen konnte, erhielt er Privatunterricht und arbeitete für sich zu Hause das gewöhnliche Universitätspensum in Mathematik durch.

In seinen Universitätsstudien in Heidelberg beschäftigte er sich zunächst mit Astronomie und Physik und schloß sich dann in Gießen und Göttingen dem Kreis der jungen Mathematiker um Chlebsch und Gordan an. Zu diesem Kreis gehörten auch Brill, mit dem Noether später viele Arbeiten gemeinsam veröffentlichte, und Felix Klein.

1870 habilitierte sich Noether in Heidelberg. An besonderen Arbeiten Noethers möchte ich erwähnen den 1873 veröffentlichten Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, auch als „Noether-Satz" bezeichnet[24], die 1874 gemeinsam mit Brill verfaßte große Abhandlung über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie[25], eine Arbeit (1882) zur Theorie der algebraischen Raumkurven und den, wiederum gemeinsam mit Brill 1894 durchgeführten Bericht über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit"[26], einen 460 Seiten umfassenden geschichtlichen Rückblick über diesen Zweig der Mathematik.

1875 hatte Noether einen Ruf auf das Extraordinariat in Erlangen erhalten, das durch die Ernennung Gordans zum Ordinarius frei geworden war. 1888 wurde Noether zum ordentlichen Professor, später zum Geheimen Hofrat ernannt. 1880 hatte sich Noether mit Ida Kaufmann aus Köln vermählt. Der Ehe sind vier Kinder entsprossen, von denen zwei, Fritz Noether in Breslau und Emmy Noether in Göttingen, ebenfalls die Hochschullaufbahn als Mathematiker einschlugen.

Neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit ist Noethers Mitarbeit an den Mathematischen Annalen hervorzuheben, wo er vor allem Arbeiten algebraisch-geometrischen Inhalts prüfte und durch seine umfassenden Nachrufe auf bekannte Mathematiker einen wichtigen Beitrag zur Geschichte der Mathematik lieferte. (Von seinem Nachruf auf Paul Gordan und seinem Rückblick auf Karl von Staudt wurde auch in diesem Aufsatz Gebrauch gemacht.)

Der Erlanger Universität gehörte Noether 46 Jahre lang an, da er trotz seiner Emeritierung während des 1. Weltkrieges und darüberhinaus bis 1919 in Wirksamkeit blieb. Am 13. 12. 1921 ist Max Noether in Erlangen im 78. Lebensjahr verschieden. Er wurde nach Nürnberg zur Einäscherung überführt und kam nicht mehr nach Erlangen zurück. Seine Grabstelle in Nürnberg ist nicht mehr bekannt, doch existiert auf dem Erlanger Judenfriedhof nach das Grab eines seiner Kinder. Seine Wohnung hatte Noether zunächst in der Hauptstraße 23, später Nürnberger Straße 32 (jetzt Kaufhaus Horten).

Die Stadt Erlangen hat 1960 eine Straße im Ortsteil Bruck nach Max Noether und seiner Tochter Emmy Noether benannt.

24) s. Mathematischer Teil, Max Noether: Algebraische Geometrie, Anmerkung 57.

25) s. Mathematischer Teil, Max Noether: Algebraische Geometrie, Anmerkung 54.

26) Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Bericht gemeinsam mit Brill. In: Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 3 (1894), S. 107–566.

6. Emmy Noether (1882–1935)

Eine ausführliche Lebens- und Werkbeschreibung Emmy Noethers findet sich in den „Biographien bedeutender Mathematiker“ von Hans Wußing und Wolfgang Arnold.[27] Ebenso müssen die Nachrufe auf Emmy Noether von Hermann Weyl und van der Waerden genannt werden.[28] Mit besonderer Berücksichtigung der Erlanger Zeit hat Ilse Sponsel im Jahresbericht 1966/67 des Marie-Therese-Gymnasiums und in „das neue Erlangen“, Heft 45 (1978) über Emmy Noether geschrieben.

Geboren wurde Emmy Noether am 22. 3. 1882 in Erlangen als Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether. Von 1889 bis 1897 besuchte sie die Höhere Töchterschule in

27) s. Literaturverzeichnis (8) S. 504–513.

28) Hermann Weyl „Emmy Noether“ In: Scripta mathematica 3, 1935 S. 201–220.
Van der Waerden „Nachruf auf Emmy Noether“. In: Math. Annalen 111 (1935) S. 469–476.

Erlangen (das heutige Marie-Therese-Gymnasium) und schloß 1900 eine Ausbildung als Lehrerin der französischen und englischen Sprache ab. Dann aber wandte sie sich dem Mathematikstudium zu, holte 1903 in Nürnberg das Abitur nach und beendete als erste Erlanger Frau 1907 ihr Studium. In ihrer Dissertation zur Invariantentheorie („Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form") ist noch der Einfluß Paul Gordans, ihres Doktorvaters, erkennbar. Später wandte sie sich in Arbeiten zur Idealtheorie vor allem der Herausarbeitung der abstrakten algebraischen Strukturen wie Ring, Modul, Gruppe, Körper, Ideal usw. zu. Ihre Gedankengänge sind heute vor allem durch das bekannte Algebra-Buch ihres bedeutenden Schülers van der Waerden (das Buch erschien 1930 zum ersten Mal und ist bis heute für die moderne Algebra richtungsweisend) Allgemeingut der Mathematiker geworden.

1915 war Emmy Noether nach Göttingen gezogen, hatte aber, trotz einer Reihe bedeutender Arbeiten über Differentialinvarianten und trotz der Fürsprache Felix Kleins und David Hilberts, zunächst nicht habilitieren dürfen, da die Habilitationsordnung ausdrücklich nur Männer zuließ. Von Hilbert wird berichtet, daß er sich – wenn auch ohne Erfolg – für sie mit dem Argument eingesetzt habe, daß er nicht einsehen könne, wieso das Geschlecht eine Rolle spiele, schließlich seien sie eine Universität und keine Badeanstalt. So konnte sich Emmy Noether erst 1919 habilitieren, als nach dem 1. Weltkrieg eine neue Habilitationsordnung eingeführt worden war.

Aber auch später entstanden ihr noch Schwierigkeiten aus ihrem Geschlecht. So erhielt sie nur einen Lehrauftrag für Algebra, bekam aber nie eine Berufung als ordentlicher Professor an einer deutschen Universität. Schließlich wurde ihr 1933 wegen ihrer jüdischen Abstammung die Lehrbefugnis entzogen. Sie emigrierte in die USA, wo sie am Bryn Mawr College, einer Frauenhochschule in Pennsylvanien, eine Gastprofessur erhielt. Sie war damit in unmittelbarer Nähe von Princeton, wo inzwischen auch Albert Einstein und Hermann Weyl als Professoren aufgenommen worden waren. Am 14. 4. 1935 verstarb Emmy Noether ganz unerwartet nach einer Operation. Daß ihr Albert Einstein in der New York Times einen herzlichen Abschiedsgruß widmete, spricht wohl für ihre Bedeutung als Wissenschaftler und Mensch. Hermann Weyl sagt in seinem Nachruf über sie: "She was a great mathematician, the greatest, I firmly believe that her sex ever produced, and a great woman".[29]

Die Stadt Erlangen hat ihre bedeutende Tochter dadurch geehrt, daß sie 1960 eine Straße im Ortsteil Bruck nach ihr und ihrem Vater benannte. Aber auch die Universität hält ihr Andenken hoch. Seit 1974 verleihen die Naturwissenschaftlichen Fakultäten alljährlich den „Emmy-Noether-Preis" für besonders hervorragende Habilitationen. Schließlich erhielt im März 1982 aus Anlaß ihres 100. Geburtstages das neu geschaffene Südwest-Gymnasium den Namen „Emmy-Noether-Gymnasium" verliehen. Das Geburtshaus Emmy Noethers ist das Haus Hauptstraße 23 (jetzt Kaufhaus Heka).

---

29) s. Anmerkung 28, S. 220.

II Beiträge der Erlanger Mathematiker zur Entwicklung der Geometrie

1. Allgemeiner Überblick

Die Bedeutung der Arbeiten der hier genannten Mathematiker für den Gesamtaufbau der Geometrie sind ohne Kenntnis geometrischer Zusammenhänge in ihrem Wert nicht richtig einzuschätzen. Ich will deshalb versuchen, die wichtigsten Gedankengänge anzudeuten, wobei es wohl unerläßlich ist, sich in einem kurzen Überblick die geschichtliche Entwicklung der Geometrie und ihrer verschiedenen Teilgebiete zu veranschaulichen. Dabei sollen hier nur die wesentlichen Entwicklungslinien aufgezeigt werden, soweit sie für die Geometrie des 19. Jahrhunderts und insbesondere für die daran beteiligten Erlanger Mathematiker notwendig sind.

In der Geschichte der Geometrie spielen zwei verschiedene Denkansätze eine wichtige Rolle: der „synthetische", in dem nur mit geometrischen Begriffen ohne Zuhilfenahme anderer Dinge, wie Zahlen, gearbeitet wird, und der „algebraisch-analytische", in dem durch Einführung von Koordinaten (z. B. Zahlenpaaren für die Punkte einer Ebene) geometrische Aussagen rechnerisch erschlossen werden können. Im Gegensatz zur analytischen Geometrie wird die synthetische Geometrie oft auch als „reine Geometrie" bezeichnet.

Ein dritter Ansatz zu geometrischen Fragestellungen wird in der „Darstellenden Geometrie" durchgeführt. Die Darstellende Geometrie beschäftigt sich mit zeichnerischen Abbildungen des dreidimensionalen Raumes auf eine Ebene und findet dementsprechend ihre Anwendungen in Kunst und Technik. Da aber die Erlanger Mathematiker nie Fragen der Darstellenden Geometrie aufgegriffen haben, soll dieses Kapitel der Mathematik hier unberücksichtigt bleiben.

Euklid von Alexandria (um 325 v. Chr.) hat als erster in seinem zusammenfassenden mathematischen Werk, den 13bändigen „Elementen", der Geometrie einen axiomatischen Aufbau gegeben, d. h. er errichtet die Geometrie auf einem System von Definitionen und als richtig hingestellten Grundsätzen (Axiomen), aus denen dann alle übrigen geometrischen Aussagen (die Lehrsätze) durch logisches Schließen hergeleitet werden. Über 2000 Jahre lang wurde die Geometrie fast unverändert nach diesem Aufbauplan Euklids gelehrt und auch für den Aufbau anderer Zweige der Mathematik ist die Axiomatik Euklids Vorbild geworden. Dabei ist die Geometrie Euklids ihrem Verfahren nach synthetisch, die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene werden in einem rein geometrischen Sinne verwendet und auch die Schlußweise ist weitgehend rein geometrisch.

Im einzelnen finden sich bei Euklid die allgemeinen Auseinandersetzungen über die geometrischen Grundgebilde wie Strecken, Winkel, Flächeninhalte und die Lehre von den einfachen geometrischen Figuren (Dreieck, Parallelogramme, Kreise, reguläre Vielecke), eine Lehre über Streckenverhältnisse und die Ähnlichkeitslehre. In der Raumgeometrie werden die Volumina einfacher Körper angegeben, wobei immer wieder auch die Frage der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal aufgeworfen wird.

Ergänzt und erweitert wurden die Elemente Euklids zunächst durch Apollonius von Perge (um 200 v. Chr.), der in seiner Kegelschnittslehre die geometrischen Gebilde Parabel, Hyperbel und Ellipse behandelt.

Als weiteres Teilgebiet der Geometrie kam dann die Trigonometrie (Lehre von den Winkelberechnungen) hinzu. Bereits Aristarch, Archimedes und Ptolemäus hatten trigonometrische Berechnungen durchgeführt. Systematisch entwickelt wurde die Trigonometrie aber erst von den Indern und Arabern, von denen sie ab dem 15. Jh. (vor allem durch die Schriften von G. v. Peurbach und J. Regiomontan) im Abendland übernommen und fortgeführt wurde.

Mit der Entwicklung der Trigonometrie war bereits eine Loslösung von rein geometrischen Arbeitsmethoden vollzogen. Doch bringt erst die Analytische Geometrie als gedanklichen Ansatz für geometrische Fragestellungen die rechnerischen Methoden voll zur Geltung. Die Einführung von Koordinatensystemen und damit die Entstehung der Analytischen Geometrie ist eine Schöpfung der Neuzeit. Wir verdanken sie dem Franzosen René Descartes, der sie nach Vorarbeiten von François Viète und Pierre de Fermat 1637 in seinem Werk „La Géométrie" entwickelte.

Damit schien die Geometrie im wesentlichen abgeschlossen zu sein. Doch ergab sich im 19. Jahrhundert durch neue Fragestellungen ein völlig unerwarteter Aufschwung, und gerade hier finden sich wesentliche Arbeiten der Erlanger Mathematiker. Als wichtigste Beiträge dieses Jahrhunderts zur Entwicklung der Geometrie möchte ich 6 Punkte nennen:

- die Entwicklung der Projektiven Geometrie,
- die Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrien,
- die Anfänge der Topologie,
- den Gedanken des Aufbaus der verschiedenen Zweige der Geometrie nach Abbildungsgruppen (Erlanger Programm),
- die Weiterentwicklung der algebraisch-analytischen Methoden der Geometrie und
- den Abschluß des geschlossenen axiomatischen Aufbaus der Geometrie durch das Hilbertsche Axiomensystem.

In dem folgenden Aufsatz möchte ich zuerst auf die Arbeiten des Erlanger Gymnasial-Professors Karl Feuerbach eingehen, der gerade in der Zeit des Umbruchs im geometrischen Denken mit dem nach ihm benannten Feuerbachschen Kreis noch einmal einen Beitrag zur alten Euklidischen Geometrie erbrachte. Überdies hat er sich mit der Entwicklung der Tetraederkoordinaten auch mit Fragen der Analytischen Geometrie beschäftigt. Sodann kann als einer der bedeutendsten Vertreter der projektiven Geometrie der Erlanger Mathematiker Karl von Staudt nicht übersehen werden. Von Felix Klein sollen neben dem Erlanger Programm auch seine Arbeiten zur Nichteuklidischen Geometrie sowie die Kleinsche Flasche als Beispiel eines Beitrags zur Topologie genannt werden. Auf Karl Feuerbach, Karl von Staudt und Felix Klein möchte ich hier in erster Linie aufmerksam machen. Darüberhinaus sind aber auch die Erlanger Professoren Paul Gordan und Max Noether zu erwähnen, die wichtige Beiträge zur Invariantentheorie und zur algebraisch-analytischen Methode der Geometrie erbracht haben. Schließlich möchte ich noch auf Emmy Noether hinweisen, da erst kürzlich ein Erlanger Gymnasium nach ihr benannt wurde. Emmy Noether hat sich zwar mit Fragen der abstrakten modernen Algebra beschäftigt, aber immerhin bedient sich heute die algebraische Geometrie der auf ihren Ideen beruhenden Algebra. Insofern ist wohl ein Hinweis auf sie auch in diesem Rahmen angebracht.

Im Folgenden wird nun versucht, die wichtigsten Arbeiten dieser mit Erlangen verbundenen Mathematiker in den größeren Zusammenhang der Geschichte der Mathematik zu stellen.

2. *Karl Feuerbach*

2.1 Der Feuerbach-Kreis

1822 erschien bei Riegel und Wießner in Nürnberg die Schrift „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung von Karl Wilhelm Feuerbach, der Philosophie-Doktor".[30] Der Freiburger Professor Butzengeiger hat der Schrift eine 14 Seiten umfassende Vorrede vorausgeschickt, in der er die vorzügliche Methode Feuerbachs lobt und meint, Feuerbach hätte sich auch an größere Arbeiten herantrauen sollen. Auf die Arbeit selbst geht er dabei allerdings nicht ein.

In dieser Schrift stellt Feuerbach zunächst alle bekannten Eigenschaften des Dreiecks zusammen, wie Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, In-, Um- und Ankreise usw. Im 4. Abschnitt gibt er dann den Satz an, daß der Kreis durch die drei Seitenmitten des Dreiecks zugleich durch die drei Höhenfußpunkte geht. Dieser Kreis wurde später nach ihm „Feuerbach-Kreis" genannt (Abb. 1).

Im allgemeinen ist ein Kreis durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt. So gibt es auch zu jedem Dreieck einen Umkreis, d. h. einen Kreis durch die drei Eckpunkte. Dagegen haben Vierecke nur in besonderen Fällen einen Umkreis, denn der Kreis muß hier ja durch vier festgelegte Punkte gehen. Das ist beim Quadrat und dem Rechteck möglich, bei der Raute aber schon nicht mehr, erst recht nicht bei einem völlig beliebigen Viereck.

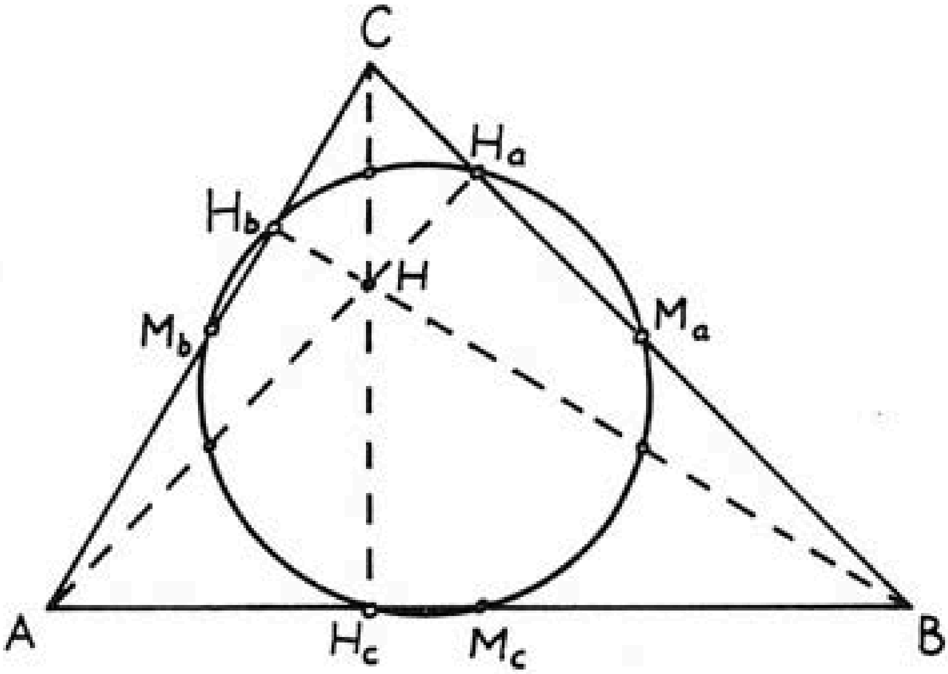


Abb. 1: Feuerbach-Kreis. Der Kreis geht durch die drei Seitenmitten M_a, M_b und M_c, durch die drei Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c, sowie durch die drei Halbierungspunkte der Höhenabschnitte.

30) Karl Wilhelm Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Nürnberg, 1822. Zweite, nicht geänderte Ausgabe Haarlan: P. Visser, 1908, mit ausführlichen Literaturangaben zu den bis 1908 erschienenen Schriften über den Feuerbach-Kreis.

Der Feuerbach-Kreis geht nun sogar durch 9 in einem beliebigen Dreieck fest vorgegebene Punkte, da auch die drei Halbierungspunkte der Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunktes mit den Ecken des Dreiecks auf diesem Kreis liegen. Und das ist schon etwas Besonderes. Diese 9 Punkte auf dem Kreis hatten allerdings schon ein Jahr vor Feuerbach die französischen Mathematiker Brianchon und Poncelet angegeben,[31] doch hat Feuerbach darüberhinaus eine weitere Eigenschaft dieses Kreises entdeckt, nämlich daß der Kreis sowohl den Inkreis des Dreiecks als auch die drei Ankreise berührt (Abb. 2) – eine weitere Merkwürdigkeit, denn ein Kreis ist schon durch die Berührung mit drei anderen Kreisen ein-

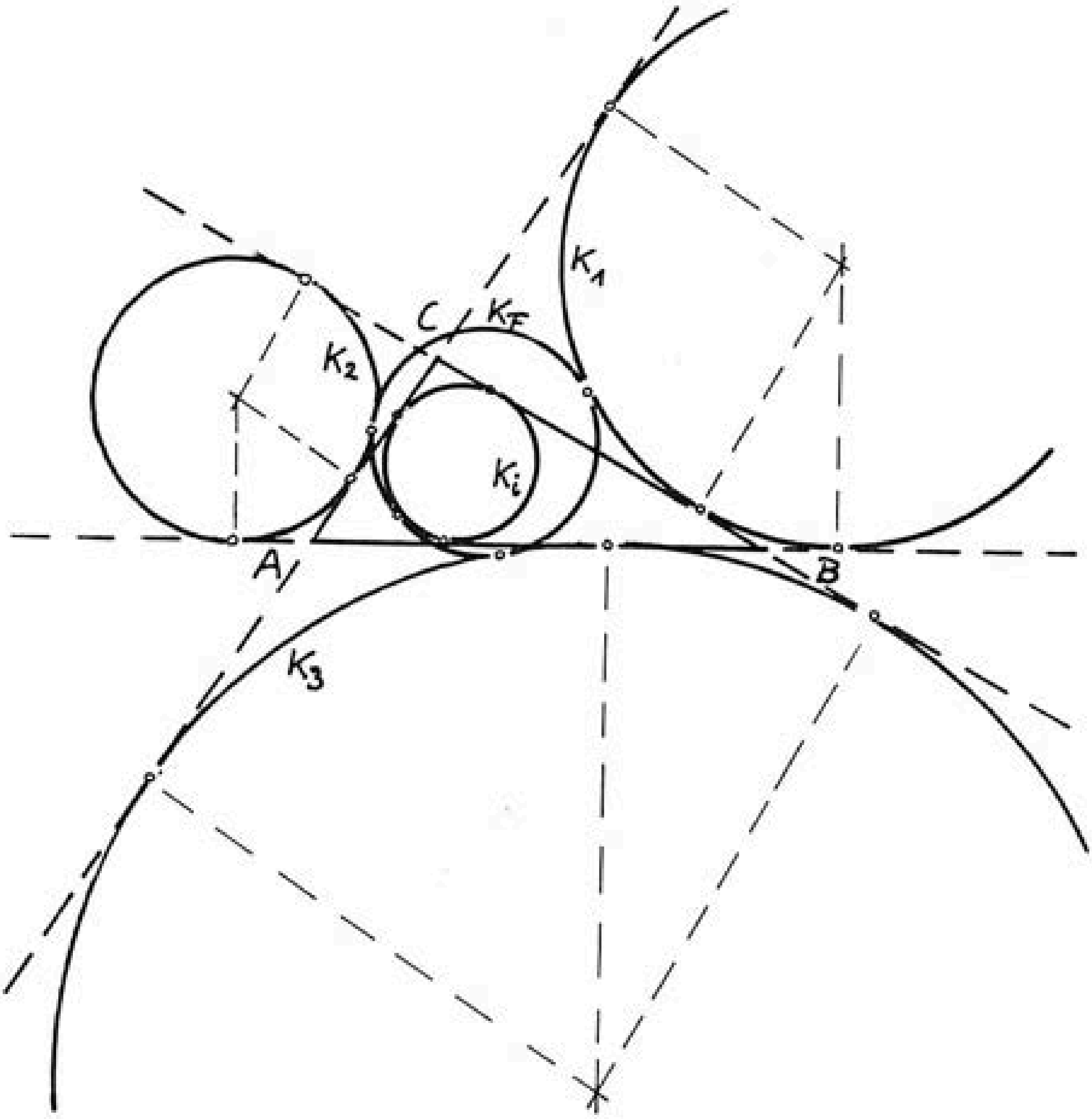


Abb. 2: Der Feuerbach-Kreis K_F berührt sowohl den Inkreis K_i als auch die drei Ankreise K_1, K_2, K_3.

---

31) Charles-Julien Brianchon – Victor Poncelet: Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatres conditions données, Annales de Mathematiques pures et appliquées (Gergonne), 9, 205–220 (1821).

deutig festgelegt. Feuerbach hat übrigens nicht wie Brianchon und Poncelet von einem 9-Punkte-Kreis gesprochen, sondern er gab nur, wie schon gesagt, an, daß die drei Seitenmitten und die drei Höhenfußpunkte auf einem Kreis liegen. Das war also ein 6-Punkte-Kreis. Diese Tatsache könnte darauf hindeuten, daß Feuerbach nicht nur die Eigenschaft der Berührung von In- und Ankreisen entdeckt hat, sondern auch den Kreis selbst unabhängig von der Arbeit der französischen Mathematiker gefunden hat.

Bis in die 60er Jahre dieses Jahrhunderts stand der Feuerbach-Kreis in den Lehrbüchern der Mittelstufe der Gymnasien und sein Beweis wurde mit den Schülern besprochen. Seit der Reform des Mathematikunterrichts und des Einbringens mengen- und abbildungstheoretischer Arbeitsmethoden ist er allerdings aus den Lehrbüchern verschwunden. Ich habe hier nur den Lehrsatz selbst angegeben, der Beweis kann in älteren Schulbüchern oder in mathematischen Standardwerken[32] nachgelesen werden. Er erfordert lediglich Kenntnisse aus der Ähnlichkeitslehre, wie sie den Schülern der 9. Klassen vermittelt werden.

Gedanklich einfacher gestaltet sich der Beweis, wenn Methoden der analytischen Geometrie verwendet werden können, wie sie in der Oberstufe der Gymnasien gelehrt werden. Man kann etwa die eine Dreiecksseite auf die x-Achse legen, die zugehörige Höhe auf die y-Achse. Dann läßt sich ohne Schwierigkeiten die Gleichung des Kreises, der durch die drei Seitenmitten geht, aufstellen. Durch Einsetzen der Koordinaten der fraglichen Punkte in diese Kreisgleichung ergibt sich dann die 9-Punkte-Eigenschaft des Feuerbach-Kreises.

Zur zeitgeschichtlichen Einordnung der Entdeckung des Feuerbach-Kreises ist noch zu sagen, daß die Geometrie in ihrem axiomatischen Aufbau durch das grundlegende Werk Euklids, die 13bändigen Elemente, und die Ergänzungen des Apollonius, die Konika oder Kegelschnittslehre, bereits im Altertum nahezu abgeschlossen war. Im Mittelalter und der Neuzeit kam nur wenig Neues hinzu. Mit der Entdeckung des Feuerbach-Kreises wird noch einmal ein Beitrag zur Euklidischen Geometrie geleistet. Und zwar genau in der Zeit, in der mit der Entwicklung der Nichteuklidischen Geometrien durch Gauß, Bolyai und Lobatschewski ein neues Zeitalter der geometrischen Betrachtungen eingeleitet wird.

2.2 Die Feuerbach-Kugel

Der Begriff des Feuerbach-Kreises kann auch in den Raum übertragen werden. Das räumliche Analogon zum ebenen Kreis ist die Kugel. Dem Dreieck, das durch drei nicht in einer Gerade liegende Punkte bestimmt wird, entspricht im Raum die dreiseitige Pyramide, auch Tetraeder genannt, die durch 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte bestimmt wird. Dem Umkreis des Dreiecks entspricht dann die Umkugel des Tetraeders.

Einen Weg zur Festlegung einer „Feuerbach-Kugel" beschreibt Rudolf Fritsch 1975 in seiner Konstanzer Universitätsrede[33]. Setzt man anstelle der Mittelpunkte der Dreiecksseiten die Schwerpunkte der vier Tetraederseiten, dann kann man entsprechende Analogien in den Eigenschaften der so bestimmten Feuerbach-Kugel zu den Eigenschaften des Feuerbach-Kreises der Ebene feststellen. Anders als die drei Höhen eines Dreiecks müssen sich aber die vier Höhen eines Tetraeders durchaus nicht in einem Punkt schneiden, ja selbst zwei Höhen brauchen hier keinen gemeinsamen Punkt zu haben. Fritsch fordert nun einen, dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks entsprechenden Punkt im Tetraeder. Dieser Punkt soll, falls das Tetraeder einen Höhenschnittpunkt besitzt, mit dem Höhenschnittpunkt zusammenfallen, und außerdem soll gelten, daß seine Verbindungsstrecken zu den Eckpunkten

32) z. B. Zwerger-Klug: Planimetrie. Lindauer-Verlag, München, 24. Auflage 1958, S. 150–151, oder Handbuch der Schulmathematik, Literaturangabe (2), Bd. 3, S. 154–155.

33) Rudolf Fritsch: Zum Feuerbachschen Kreis, Konstanzer Universitätsreden, Konstanz 1975.

des Tetraeders von der Feuerbach-Kugel in besonderen Punkten geschnitten werden. Das ist die Entsprechung der Halbierung der Verbindungsstrecken des Höhenschnittpunktes des Dreiecks mit den Dreiecksecken durch den Feuerbach-Kreis. Diesen Punkt nennt Fritsch „Feuerbach-Punkt".

Galt für den Feuerbach-Kreis der Satz, daß sein Radius gleich dem halben Radius des Umkreises ist, so gilt jetzt für die Feuerbach-Kugel, daß ihr Radius gleich dem dritten Teil des Radius der Umkugel ist. Diese Zahl ⅓ nennt Fritsch die „Feuerbach-Zahl".

Aber auch Feuerbach selbst hat die Erweiterung des 9-Punkte-Kreises zur Feuerbach-Kugel in einem Spezialfall bereits vollzogen. In der Einleitung zu dem ungedruckten Manuskript, auf das im nächsten Kapitel noch genauer eingegangen wird, nennt er einen Satz besonders, nämlich: Wenn sich die vier Höhen eines Tetraeders in einem Punkt treffen, dann muß der Radius der Kugel durch die vier Höhenfußpunkte gleich dem dritten Teil des Radius der Umkugel des Tetraeders sein. Das ist eine Verallgemeinerung des Feuerbach-Kreises zur Feuerbach-Kugel für ein spezielles Tetraeder.

2.3 Tetraederkoordinaten

Neben der Abhandlung über die merkwürdigen Punkte im Dreieck sind von Feuerbach noch drei weitere Schriften erhalten, nämlich ein Manuskript von 1826, die in Nürnberg 1827 gedruckte Schrift „Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide"[34], sowie eine gedruckte Voranzeige zu diesem Grundriß, die 1826 in der Zeitschrift Isis erschien mit dem Titel „Einleitung zu dem Werke Analysis der dreyeckigen Pyramide durch die Methode der Koordinaten und Projektionen. Ein Beytrag zu der analytischen Geometrie"[35].

Diese drei Schriften gehören zusammen. Das Manuskript ist eine ausführliche Bearbeitung der Gedanken Feuerbachs, die er in dem 1827 gedruckten Grundriß auszugsweise veröffentlicht, während die Notiz in der Zeitschrift Isis wie im Titel ausgedrückt nur eine Voranzeige auf den Grundriß ist. Moritz Cantor hat 1910 in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie der Wissenschaften[36] auf das bis dahin nicht beachtete Manuskript hingewiesen und es ausführlicher gewürdigt. Es befand sich damals in Privatbesitz der Familie Feuerbach.

Im 1. Teil der Arbeit stellt Feuerbach bis dahin bekannte Eigenschaften der dreiseitigen Pyramide zusammen. Im 2. Teil „Die Theorie der Koordinierten Koeffizienten, eine neue Methode, welche die Raumgrößen in Beziehung auf eine Urpyramide betrachtet" entwickelt er dann seine neue Arbeitsmethode, die er im Folgenden auf raumgeometrische Fragestellungen anwendet. Der dritte Teil, „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte der dreieckigen Pyramide und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren" ist unvollendet. Das ist wohl auch der Grund, weshalb das Manuskript nicht gedruckt wurde. In der Voranzeige hatte Feuerbach zwar die grundlegenden Sätze genannt, aber fast keine Anwendungen gegeben, während der Grundriß zwar Anwendungen nennt, aber da er nur in Kommission bei Riegel und Wießner in Nürnberg erschien, praktisch keine Verbreitung erfuhr. So

34) Karl Wilhelm Feuerbach, Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide, in Kommission bei Riegel und Wießner, Nürnberg, 1827.

35) Karl Wilhelm Feuerbach, Einleitung zu dem Werke Analysis der dreieckigen Pyramide durch die Methode der Coordinaten und Projektionen, in der Zeitschrift Isis, Jahrgang 1826, S. 565–569. Die Zeitschrift erschien 1817–1848 in 32 Bänden, Herausgeber Lorenz Oken.

36) Moritz Cantor, Karl Wilhelm Feuerbach, in Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 25. Abhandlung, Heidelberg 1910.

kommt es, daß diese Arbeit Feuerbachs in Mathematikerkreisen zunächst keine Resonanz fand und als Entdecker der Tetraederkoordinaten August Ferdinand Möbius (1790–1868) gilt. Denn gleichzeitig mit Feuerbach, aber unabhängig davon, hatte Möbius dieselben Überlegungen angestellt und 1827 in der Schrift „Der baryzentrische Kalkül, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie“[37] veröffentlicht. Darin beschreibt er sowohl die Dreieckskoordinaten in der Ebene als auch die Tetraederkoordinaten im Raum. Was aber Feuerbach die vier koordinierten Koeffizienten eines Punktes nennt, ist nichts anderes als die heute so genannten Tetraederkoordinaten.

Wir haben hier das in der Mathematikgeschichte gar nicht einmal so seltene Phänomen der gleichzeitigen Entdeckung eines Sachzusammenhangs vor uns. Bekannter als Beispiele für das voneinander unabhängige Auffinden neuer Gesetzmäßigkeiten sind die Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrien durch Gauß, Bolyai, Lobatschefskij und Schweikart, sowie die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz.

Bei den Dreiecks- oder Tetraederkoordinaten handelt es sich um Folgendes: In einem ebenen Koordinatensystem ist ein Punkt üblicherweise durch zwei Koordinaten x, y festgelegt, im Raum durch die drei Koordinaten auf den Achsen. Man kann aber auch einen Punkt durch seine Abstände von drei anderen Punkten derselben Ebene festlegen. Und genau diesen Gedanken hat Feuerbach mit seiner Methode der koordinierten Koeffizienten im Raum ausgeführt.

Zum leichteren Verständnis will ich das Verfahren an einem ebenen Beispiel erläutern: Die Abstände eines Punktes von den Seiten eines Dreiecks stehen in bestimmten Verhältnissen zu den Abständen der Eckpunkte des Dreiecks von den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Diese Verhältniszahlen $\frac{p}{h} = \lambda$ erhalten nun eine eigene Bedeutung. In dem Dreieck der Abbildung 3, das zum besseren Verständnis des Zusammenhangs auf besonders einfache Zahlenverhältnisse abgestimmt ist, gilt z. B. für den Schwerpunkt S:

$$\lambda_a = \frac{p_a}{h_a} = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_b = \frac{p_b}{h_b} = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_c = \frac{p_c}{h_c} = \frac{1}{3}$$

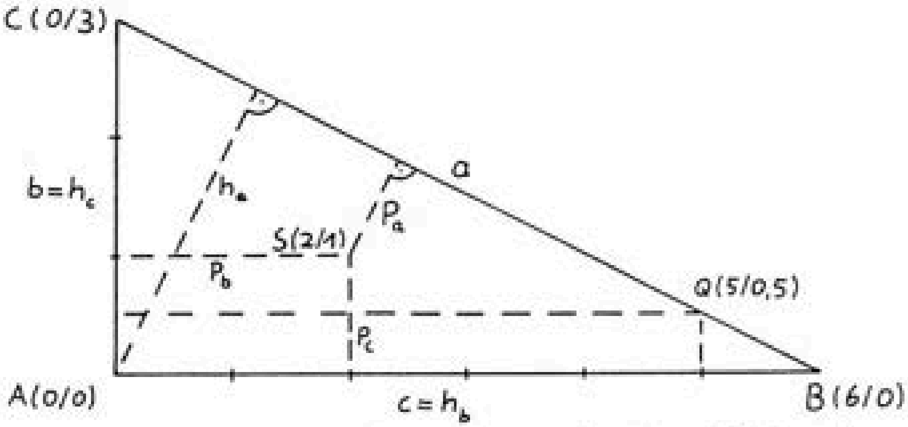


Abb. 3: Abstände zweier Punkte S und Q von den Seiten des Dreiecks.

Für Q gilt:

$\lambda_a = 0,\ \lambda_b = \frac{5}{6},\ \lambda_c = \frac{1}{6}.$ Allgemein gilt der Satz: $\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 1.$

37) August Ferdinand Möbius, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827, Nachdruck 1976 Georg Olms Verlag Hildesheim – New York.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden festgelegt. Er erhält einen physikalischen Sinn, wenn die Massenverteilung im Dreieck völlig gleichmäßig ist, oder in jedem der drei Eckpunkte $\frac{1}{3}$ der Gesamtmasse des Dreiecks angebracht wird. Dementsprechend hat auch ein System von gewichteten Punkten einen Schwerpunkt. Umgekehrt können drei beliebigen Punkten einer Ebene solche Gewichte beigelegt werden, daß man dann einen beliebigen 4. Punkt der Ebene als Schwerpunkt des Systems erhält.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Übereinstimmung der Schwerpunktkoordinaten oder baryzentrischen Koordinaten, wie Möbius sie nennt, mit den von Feuerbach als koordinierten Koeffizienten bezeichneten Koordinaten eines Punktes. Während aber Möbius Rechnungen mit den baryzentrischen Koordinaten an ebenen und räumlichen Aufgaben entwickelt, hat Feuerbach seine Methode der koordinierten Koeffizienten von vornherein nur im Raum durchgeführt.

Vier Punkte im Raum bestimmen ein Tetraeder oder eine Urpyramide, wie Feuerbach sich ausdrückt. Die Abstände eines Punktes von den vier Seiten der Urpyramide stehen in bestimmten Verhältnissen zu den Abständen der vier Eckpunkte der Pyramide von den jeweils gegenüberliegenden Seiten. Für diese vier Verhältniszahlen o, l, m, n gilt der Satz $o + l + m + n = 1$. Soweit Feuerbach. Er nennt die vier Verhältniszahlen koordinierte Koeffizienten des Punktes, der damit durch vier Zahlenwerte, nicht wie sonst in der analytischen Geometrie, durch drei Koordinaten x, y, z, festgelegt wird.

Als erstes ergibt sich damit die Aufgabe, die Beziehungen zwischen den Koordinaten x, y, z und den o, l, m, n-Werten zu bestimmen. Sodann vereinfachen sich viele raumgeometrische Aufgaben durch die Anwendung dieser Koordinatenrechnung. Feuerbach führt das vorzugsweise an Aufgaben über das Tetraeder aus, während die Arbeit von Möbius allgemeiner gehalten ist.

So haben Feuerbach und Möbius durch die Entwicklung der Dreiecks- bzw. Tetraederkoordinaten gleichzeitig dem Begriff des Schwerpunktes einen von der Physik losgelösten, rein mathematischen Inhalt gegeben. Die Mathematik hat dadurch, daß das Manuskript Feuerbachs unentdeckt blieb, keine Einbuße erlitten, denn Möbius hatte die Tetraederkoordinaten als Hilfsmittel der analytischen Geometrie ja entdeckt. „Aber", schreibt Cantor[38] „die Geschichte der Mathematik wird mehr als man bisher annahm, des Namens von Karl Wilhelm Feuerbach eingedenk sein müssen."

3. Karl von Staudt: projektive Geometrie

Die projektive Geometrie entstand u. a. aus dem Bemühen die Projektion des Raumes von einem Punkt auf eine Ebene präzise erfassen zu können. Mit diesem Problem haben sich schon Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer beschäftigt. Als Begründer der projektiven Geometrie gilt J. V. Poncelet, dessen grundlegendes Werk „Projektive Geometrie" („Traité des propriétés projectives des figures") 1822 erschien. Eine von der Geometrie Euklids unabhängige Begründung der projektiven Geometrie gelang dem Erlanger Professor Karl Georg Christian von Staudt in seiner „Geometrie der Lage" 1847.

Die Entstehung des projektiven Raumes aus dem offenen (Euklidischen) Raum kann man sich an Hand der Abb. 4 verdeutlichen:

38) s. Anmerkung 36, S. 18.

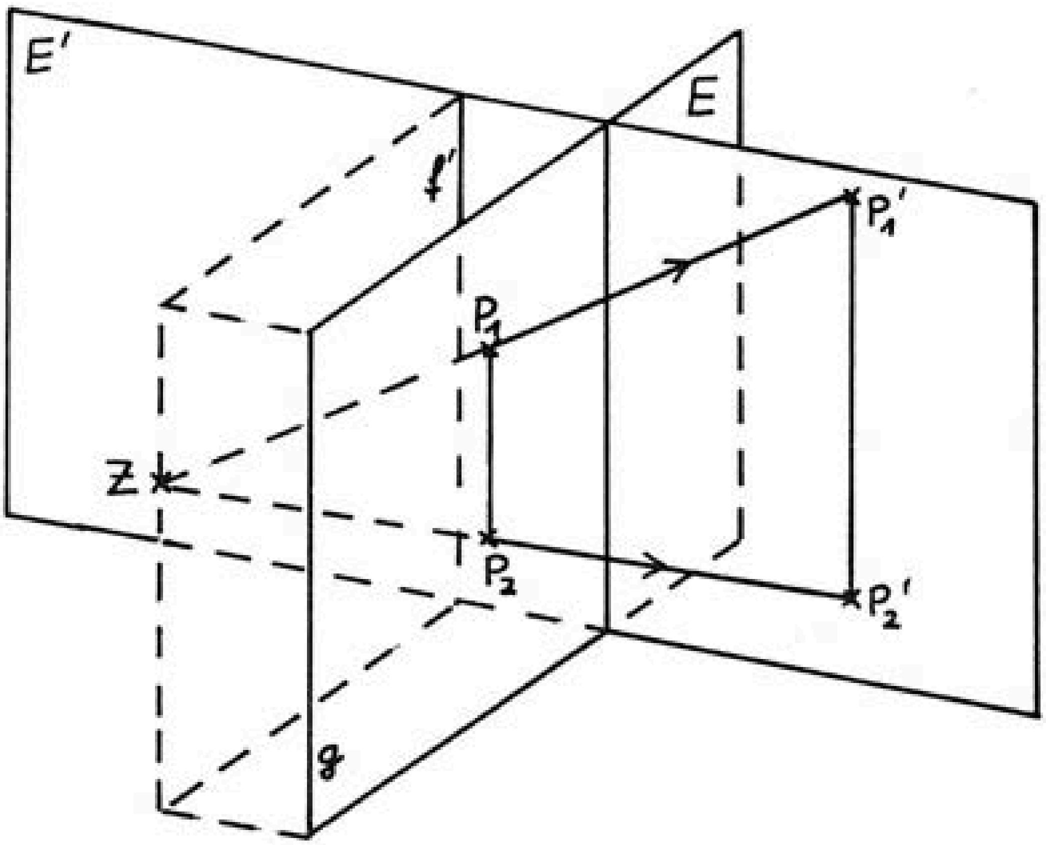


Abb. 4: Projektive Ebenen mit den Fluchtlinien g und f'.

Werden von einem Zentrum Z aus die Punkte P der Ebene E auf Punkte P' der Ebene E' abgebildet (P -- > P'), dann erhält man für alle Punkte der Ebene E Bildpunkte auf der Ebene E' mit Ausnahme der Punkte einer Geraden g, für die die Projektionsstrahlen von Z nach g parallel zu E' verlaufen. Entsprechend gibt es für die Bildpunkte der Gerade f' in E' keine Urpunkte in E, denn hier müßten die Projektionsstrahlen parallel zu E verlaufen. Die Geraden g und f' heißen Fluchtlinien.

Man kann nun den Punkten der Geraden g die unendlich fernen Punkte der Ebene E' zuordnen. Entsprechend erklärt man die unendlich fernen Punkte der Ebene E zu Urpunkten der Geraden f' der Ebene E'. Durch Hinzunahme dieser uneigentlichen Punkte erhält man die erweiterten Ebenen E und E', die dann projektive Ebenen heißen. Mit diesen Erweiterungen kann jetzt jeder Figur der Ebene E in eindeutiger Weise eine Figur der Ebene E' zugeordnet werden und umgekehrt. Eine Zuordnung dieser Art heißt projektive Abbildung oder Kollineation. Der offene (Euklidische) Raum ist durch die projektive Abbildung, d. h. durch die Hinzunahme der unendlich fernen Geraden, zu einem projektiven Raum erweitert worden. Aufgabe der projektiven Geometrie ist es nun, die in diesem projektiven Raum geltenden geometrischen Gesetze zu erforschen, abstrakter ausgedrückt, die bei Kollineationen invarianten Eigenschaften der Figuren zu untersuchen.

Die projektive Geometrie kann auch als Geometrie der vereinigten Lage bezeichnet werden, da bei der projektiven Abbildung einer Figur die gegenseitige Lage geometrischer Gebilde (z. B. Schnittpunkte von Geraden oder harmonische Lage von vier Punkten auf einer Geraden) erhalten bleibt. Rückt das Projektionszentrum Z unendlich weit weg, so erhält man als Spezialfall einer projektiven Abbildung eine Abbildung mit parallelen Projektionsstrahlen. Diese sog. affine Abbildung zeichnet sich dadurch aus, daß jetzt auch der

Parallelismus erhalten bleibt. Weitere Spezialisierungen ergeben sich, wenn die beiden Ebenen parallel stehen. Ich komme bei der Besprechung von Felix Kleins „Erlanger Programm" auf diese Zusammenhänge noch zurück. So wird es schließlich möglich, die verschiedenen Geometrien als Spezialfälle der projektiven Geometrie zu behandeln, oder, wie es Calay 1859 überspitzt ausdrückte: „projective geometry is all geometry".

Die erste bedeutende Arbeit über projektive Geometrie im deutschen Sprachraum leistete der Schweizer Jakob Steiner 1832 mit dem Werk „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander". August Ferdinand Möbius (Baryzentrischer Kalkül, 1827) und Julius Plücker (analytisch-geometrische Entwicklungen, 1828 und 1831) gehen an die Fragestellungen der projektiven Geometrie durch Einführung von Koordinaten, also analytisch, heran, während Steiner den synthetischen Ansatz bevorzugt. Aber erst Staudt entwickelte in seiner „Geometrie der Lage" die synthetischen Methoden in voller Strenge. So ersetzt er den für die projektive Geometrie grundlegenden, aber bis dahin nur metrisch gefaßten Begriff des Doppelverhältnisses durch den von ihm neu eingeführten rein geometrischen Begriff des Wurfes. (In der metrischen oder Kongruenzgeometrie bleiben die Abstände zweier Punkte erhalten, eine Längenmessung ist möglich. Das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden ist als Quotient der Abstände in folgender Weise definiert:

$$\frac{\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_2P_4}}{\overline{P_2P_3}\cdot\overline{P_1P_4}}\Bigg) .$$

Dadurch gelingt Staudt – und das ist sein eigentliches Verdienst – eine von der Euklidischen Geometrie, also den metrischen Betrachtungen, unabhängige Begründung der projektiven Geometrie. Der Satz, daß bei projektiven Abbildungen das Doppelverhältnis, also insbesondere auch die harmonische Lage von vier Punkten, erhalten bleibt, ist als Staudts Hauptsatz der projektiven Geometrie in die Literatur eingegangen.[39]

Diese Gedankengänge hatte Staudt in der 1847 in Nürnberg erschienenen „Geometrie der Lage" entwickelt, entsprechend dem Programm, das er im Vorwort dieser Schrift so angab: „Man hat in der neueren Zeit wohl mit Recht die Geometrie der Lage von der Geometrie des Maßes unterschieden, indessen gleichwohl Sätze, in welchen von keiner Größe die Rede ist, gewöhnlich durch Betrachtungen von Verhältnissen bewiesen. Ich habe in dieser Schrift versucht, die Geometrie der Lage zu einer selbständigen Wissenschaft zu machen, welche des Messens nicht bedarf."

1856, 1857 und 1860 erbrachte Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" noch eine zweite große Leistung. Und zwar überträgt er den Begriff der imaginären Zahl auf imaginäre Punkte und Geraden im projektiven Raum und erhält dadurch die Möglichkeit schwierigere geometrische Fragen elegant zu lösen.

„Indem die Mathematik danach strebt", schreibt Staudt in dem Vorwort zu den Beiträgen zur Geometrie der Lage, „Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkt aufzufassen, wird sie häufig genötigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet." Ein erster solcher Schritt war die Erweiterung des euklidischen Raumes zu einem projektiven Raum durch Hinzufügen der „uneigentlichen" Elemente, ein zweiter ist die Hinzunahme der komplexen Elemente zu den Reellen.

---

39) s. Literaturangabe (1), S. 32 ff.

Die Arbeiten Staudts enthalten weder Zeichnungen noch Rechnungen und sind, da Staudt überdies ohne induktive Hinweise alle Gesetze sogleich in ihrer endgültigen Form entwickelt, sehr schwer lesbar, so daß ein so bekannter Mathematiker wie Felix Klein darüber schreiben konnte „Mir selbst ist die Staudtsche Darstellungsweise immer gänzlich unzugänglich gewesen"[40], und an anderer Stelle, daß er es selbst „nie fertiggebracht habe, Staudt zu lesen" sondern nur durch die Gespräche mit seinem Freunde Stolz in die so interessanten Gedankengänge Staudts eingeführt worden sei.[41]

4. *Felix Klein*

4.1 Nichteuklidische Geometrien

Schon bald nach seiner Aufstellung wurde das Axiomensystem Euklids von anderen Mathematikern als lückenhaft empfunden. So hat bereits Archimedes das Axiom des Messens (es ist stets möglich, jede beliebige Strecke AB durch entsprechende Vervielfachung einer kleineren Strecke CD zu übertreffen) und die Forderung, daß die kürzeste Verbindung zweier Punkte die gerade Linie ist, angefügt. Besonders aber das sog. Parallelenaxiom des Euklid gab Anlaß für vielerlei Überlegungen.

Im ersten Buch von Euklids Elementen steht als 5. Postulat an letzter Stelle der Satz „... und daß zwei Geraden, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die zwei inneren nach derselben Seite hin gelegenen Winkel, zusammen kleiner als zwei Rechte sind, bei unbegrenzter Verlängerung sich auf d e r Seite schneiden, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind." Diesem Axiom gleichwertig ist der uns geläufigere Satz: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man in der Ebene genau eine Parallele ziehen.

Vor allem in der schwerfälligen Sprache Euklids hat dieses Parallelenpostulat eher die Form eines Lehrsatzes als die eines Axioms. Und Euklid vermeidet wohl mit Absicht auch die Anwendung dieses Postulats möglichst lange. Erst in seinem 29. Lehrsatz verwendet er es, alle vorangehenden Lehrsätze sind auch ohne das Parallelenaxiom gültig.

Durch Jahrhunderte ist nun versucht worden das Parallelenaxiom zu „beweisen", d. h. es aus den anderen Axiomen abzuleiten und damit zu einem Lehrsatz zu machen. Zu Beginn des 19. Jh. fanden diese Bemühungen eine völlig überraschende Auflösung. Nahezu gleichzeitig und vollkommen unabhängig voneinander fanden Gauß, Bolyai, Lobatschefskij und Schweikart eine Lösung des Problems dadurch, daß sie das Parallelenaxiom durch ein anderes ersetzten und auf diesem neuen Axiom aufbauend ein in sich widerspruchsfreies geometrisches System entwickelten (allerdings haben nur Bolyai und Lobatschefskij ihre diesbezüglichen Arbeiten veröffentlicht). Damit war zweierlei getan: Zum einen war eine neue, „Nichteuklidische" Geometrie entstanden, zum anderen war gerade dadurch gezeigt, daß das Euklidische Parallelenpostulat als Axiom der Geometrie notwendig ist.

Gauß, Bolyai, Lobatschefskij und Schweikart ersetzten das Euklidische Parallelenaxiom durch die Forderung, daß es durch einen Punkt außerhalb einer Geraden in der Ebene mindestens zwei Parallele gibt. Später hat Bernhard Riemann in seiner 1854 angefertigten Habilitationsschrift „Über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen" gezeigt, daß es auch möglich ist, die Annahme zu machen, es gäbe zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt außerhalb überhaupt keine Parallele. Damit ergibt sich neben der Nichteuklidischen Geometrie I. Art von Gauß, Bolyai und Lobatschefskij noch eine Nichteuklidische Geometrie II. Art.

40) s. Literaturangabe (6), Bd. 1, S. 133.

41) s. Literaturangabe (5), Bd. 2, S. 133.

Ein Modell dieser Nichteuklidischen Geometrie II. Art stellt die als sphärische Trigonometrie bekannte Geometrie auf einer Kugel dar. Hier muß der Begriff der Geraden durch den des Großkreises ersetzt werden. Da sich Großkreise immer schneiden, die Meridiane auf der Erdkugel z. B. in den Polen, gibt es keine parallelen Geraden und auch die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks beträgt nicht mehr 180° sondern ist größer.

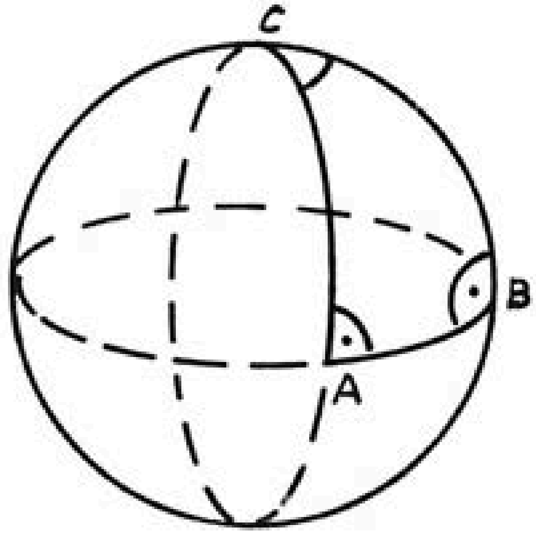


Abb. 5: In dem sphärischen Dreieck ABC ist die Winkelsumme größer als 180°.

Felix Klein hat in seiner Schrift „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie"[42] 1871 die Bezeichnungen Hyperbolische Geometrie für die Nichteuklidische Geometrie I. Art, Parabolische Geometrie für die Euklidische Geometrie und Elliptische Geometrie für die Nichteuklidische Geometrie II. Art eingeführt. Diesen Bezeichnungen liegt der Gedanke zu Grunde, daß die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte besitzt, entsprechend den zwei Parallelen der NG I, die Parabel einen unendlich fernen Punkt und die Ellipse keinen unendlich fernen Punkt.

Von Felix Klein stammt außerdem ein besonders einfaches Modell einer Nichteuklidischen Geometrie I. Art.[43] Zum Verständnis ist allerdings eine „Sprachregelung" notwendig, was unter den Begriffen Punkt, Gerade, Ebene in diesem Modell der Hyperbolischen Geometrie verstanden werden soll:

Hyperbolische Ebene = Inneres eines Kreises
Hyperbolische Gerade = Sehne des Kreises
Hyperbolischer Punkt = Punkt im Innern des Kreises.

Jeder Punkt des Randkreises spielt in diesem Modell dieselbe Rolle wie die unendlich fernen Punkte der Euklidischen Ebene. Geraden, die sich auf dem Randkreis, also im Unendlichen, schneiden, sind dann als parallel zu bezeichnen. Damit ergibt sich folgendes Bild:

42) Felix Klein: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. In: Mathematische Annalen, Bd. 4 (1871), S. 573–625, insbesondere S. 577.

43) Felix Klein: Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie, S. 183 und Felix Klein: Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. In: Mathematische Annalen 4, 6, 7, 37 (1871, 1873, 1874, 1890), abgedruckt auch in: Felix Kleins Werken I, S. 254 ff.

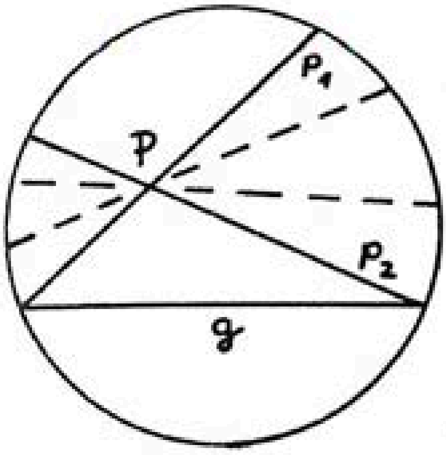


Abb. 6: Felix Kleins Modell einer Hyperbolischen Geometrie.

Durch einen Punkt gibt es jetzt ein ganzes Büschel von Geraden (Sehnen!), die die Gerade g nicht schneiden. Als Parallele bezeichnet man aber nur die beiden Grenzgeraden p_1 und p_2, die mit der Geraden g einen Randpunkt gemeinsam haben. Auf diesen Voraussetzungen aufbauend kann nun, wie Felix Klein gezeigt hat, ein in sich widerspruchsfreies System von geometrischen Lehrsätzen entwickelt werden.

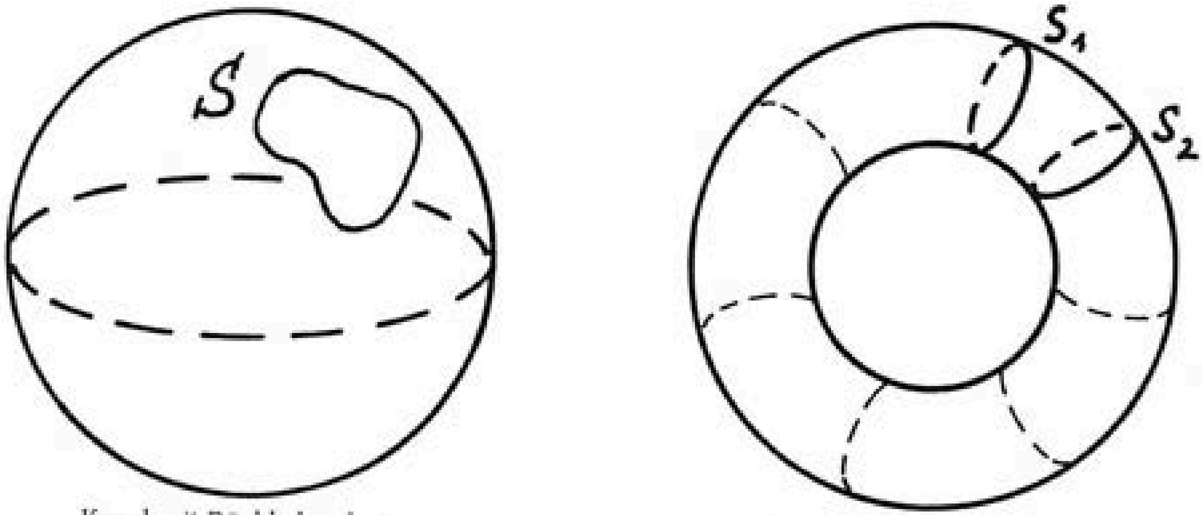
Ergänzend ist zu dem jahrhundertelangen Bemühen der Mathematiker, das Axiomensystem Euklids zu ergänzen und von Widersprüchen zu befreien, noch zu sagen, daß diese Aufgabe heute als restlos geklärt gelten darf. Nach Vorarbeiten anderer Mathematiker (hier ist vor allem M. Pasch zu nennen) veröffentlichte David Hilbert 1899 in seinem berühmten Werk „Grundlagen der Geometrie" ein in sich widerspruchsfreies und vollständiges Axiomensystem, das damit den von Euklid begonnenen axiomatischen Aufbau der Geometrie zum Abschluß brachte. Da aber zu diesem Punkt keine Beiträge Erlanger Mathematiker vorliegen, möchte ich es hier mit dieser kurzen Andeutung bewenden lassen.

4.2 Topologie und Kleinsche Flasche

Topologische Fragestellungen traten schon im 18. und zu Beginn des 19. Jh. bei Euler und Gauß auf. Den Namen Topologie verwendete zum ersten Mal Listing in seinem Werk „Vorstudien zur Topologie" 1847/48). Wir verstehen heute unter Topologie den Teil der Mathematik, der sich mit Eigenschaften geometrischer Gebilde befaßt, die bei „elastischen Verzerrungen" erhalten bleiben. Als anschauliches Bild topologischer Abbildungen kann man sich etwa die Verzerrungen von Figuren auf einem Luftballon vorstellen, wie sie beim Aufblasen oder Zusammendrücken des Ballons entstehen. Winkel und Abstände verändern sich dabei, der stetige Zusammenhang der Gebilde bleibt aber erhalten. So ergeben geschlossene Linien wieder geschlossene Linien und die Schnittpunkte von Linien bleiben erhalten. Damit sind etwa Kreis, Ellipse, Quadrat topologisch gleichwertig im Gegensatz zu Kreisring oder rechteckigem Rahmen, die ebene Flächen mit zwei Rändern darstellen. Im Raum sind Kugel, Würfel, Ei als gleichwertig zu betrachten im Gegensatz zu einem Ring oder einem Krug mit Henkel.

Im täglichen Leben werden – meist unbewußt – topologische Verzerrungen häufig angewendet. Als Beispiel seien die Bilder der städtischen Verkehrsnetze genannt, bei denen zwar die Verbindungen zweier Haltepunkte und die Kreuzungspunkte zweier Linien richtig dargestellt werden, die Entfernungen der Stationen und die Richtungen der Linien aber keineswegs „maßstabsgerecht" wiedergegeben werden.

Der bereits erwähnte Erlanger Mathematiker Karl von Staudt ist auch für die Topologie nicht ohne Bedeutung. Um seinen Beitrag zur Topologie verstehen zu können, muß ich hier den Begriff des Geschlechts einer Fläche einfügen. Mit dem Geschlecht einer Fläche meint man die Anzahl der die Fläche nicht zerstückelnden Rückkehrschnitte. So wird beispielsweise eine Kugelfläche durch jeden Rückkehrschnitt in zwei Teile zerlegt. Es gibt keine in sich geschlossene Schnittlinie, die die Kugelfläche nicht in zwei Teile zerlegen würde. Die Kugelfläche hat damit das Geschlecht Null. Dagegen sind zum Zerschneiden eines Ringes i. a. zwei Schnittflächen nötig (s. Abb. 7), der Ring hat das Geschlecht Eins.



Kugel mit Rückkehrschnitt

Ring mit 2 Rückkehrschnitten

Abb. 7: Kugel und Ring mit Rückkehrschnitten

In seiner „Geometrie der Lage" gibt v. Staudt einen Beweis des Eulerschen Polyedersatzes an. (Polyeder = Körper, der durch ebene Vielecke begrenzt wird. Polyedersatz: $e + f - k = 2$, wobei e = Zahl der Ecken, f = Zahl der Flächen, k = Zahl der Kanten bedeutet. Für den Würfel ist $e = 8, f = 6, k = 12$). In diesem Beweis spricht v. Staudt die für das Bestehen der Formel notwendige Voraussetzung, nach welcher das Polyeder eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht Null bildet, klar aus.[44]

Wesentlich größer ist die Bedeutung Felix Kleins für die Topologie. Zum einen gibt Felix Klein mit Hilfe des Erlanger Programms – ich komme später noch darauf zurück – eine klare Abgrenzung der Topologie gegenüber anderen Geometrien an, indem er den Gruppenbegriff als ordnendes Prinzip in die Geometrie einführt. Zum anderen hat Felix Klein mit der nach ihm benannten „Kleinschen Flasche" einen eigenen Beitrag zur Entwicklung topologischer Begriffe gegeben.

Auch hier muß ich zunächst die Begriffe „einseitige" und „zweiseitige" Fläche im Raum erläutern. Z. B. hat ein rechteckiges Stück einer Ebene zwei Seiten. Es ist nicht möglich von einer Seite auf die andere zu gelangen, ohne den Rand zu überschreiten. Eine Kugelfläche mit Innen- und Außenseite stellt ebenfalls eine zweiseitige Fläche dar. Allerdings spricht man jetzt, im Gegensatz zu der Rechtecksfläche, von einer zweiseitigen geschlossenen (randlosen) Fläche.

Es gibt aber auch einseitige Flächen. Bei ihnen ist es nicht möglich, etwa die eine Seite rot, die andere blau anzumalen. Das bekannteste Beispiel hierfür ist das sog. „Möbiussche Band". Man erhält ein Modell davon, wenn man das eine Ende eines langen Papierstreifens einmal um 180° dreht und dann den Papierstreifen an den Enden zusammenklebt.

---

44) Georg Fligl: Geschichtliche Entwicklung der Topologie. In: Geometrie, herausgegeben von Strubecker, Darmstadt 1972, S. 51.

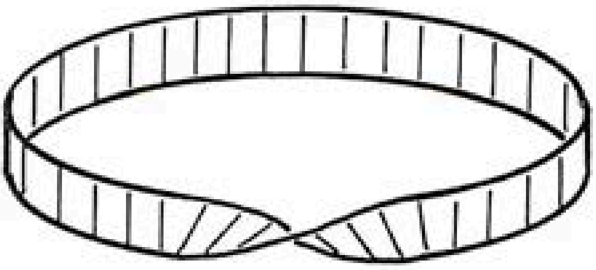


Abb. 8: Möbiussches Band.

Wie man leicht feststellt, kann man nun von „einer Seite" des Bandes auf die „andere Seite" gelangen, ohne den Rand zu überschreiten. Es ist auch nicht möglich, nur „eine Seite" des Bandes rot anzumalen; das Möbiussche Band stellt eben eine nur einseitige Fläche dar.

Mit der sog. „Kleinschen Flasche" hat nun Felix Klein ein besonders anschauliches Modell einer einseitigen geschlossenen Fläche angegeben.[45] Jede geschlossene einseitige Fläche muß allerdings notwendigerweise Selbstdurchdringungen haben, wobei die Stelle der Selbstdurchdringung jedoch nicht als Rand aufgefaßt werden darf. Anhand der Abb. 9 des Modells der Kleinschen Flasche kann man sich überzeugen, daß es hier möglich ist, von „außen" nach „innen" zu kommen, ohne einen Rand zu überschreiten, oder anders ausgedrückt, daß man es hier mit einer einseitigen geschlossenen Fläche zu tun hat.

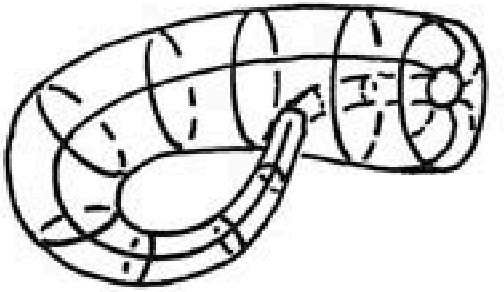


Abb. 9: Kleinsche Flasche.

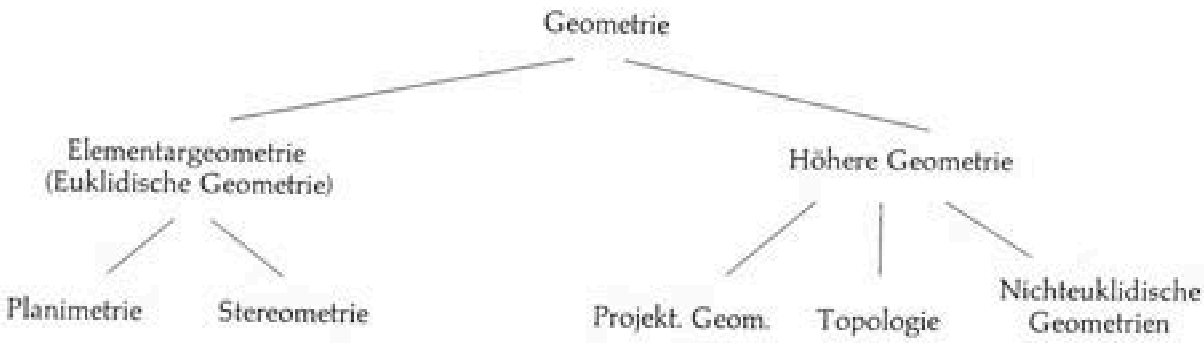
4.3 Das Erlanger Programm

Mit den Nichteuklidischen Geometrien, der Topologie und der Projektiven Geometrie hatten sich neben der Euklidischen Geometrie, die wiederum in Planimetrie und Stereometrie aufgeteilt war, und der später Trigonometrie und Analytische Geometrie angefügt wurden, bis Mitte des 19. Jh. eine Vielzahl von Geometrien gebildet. Entsprechend der Entstehungszeit und den äußeren Merkmalen hatte sich dabei eine „historische" Einteilung ergeben, die noch bis in die 60er Jahre unseres Jahrhunderts in der Schulmathematik bestand. Dabei stand, genau wie es Euklid 300 v. Chr. schon in seinen „Elementen" getan hatte, der axiomatische Aufbau der Geometrie im Vordergrund, die einzelnen Teilgebiete der Geometrie allerdings liefen völlig getrennt nebeneinander her. Für den Unterricht hatte sich dabei folgende Einteilung herausgebildet:

Planimetrie (ebene Geometrie) in der Unter- und Mittelstufe der Gymnasien entsprechend den Lehrbüchern I–VI von Euklid; Ende der Mittelstufe Stereometrie (Raumgeometrie, Lehrbücher XI–XIII Euklids); Trigonometrie (Winkelberechnungen im Dreieck) und

45) Felix Klein: Vorlesungen über höhere Geometrie. 3. Auflage, herausgegeben von W. Blaschke, 1926.

Analytische Geometrie (rechnerische Behandlung der Geometrie mit Hilfe von Koordinaten) als später hinzukommende Wissenschaften in der Oberstufe der Gymnasien und schließlich Projektive Geometrie, Topologie und Nichteuklidische Geometrien als Stoffgebiet der Universitäten. In einer vereinfachten Übersicht sah das so aus:



Ein völlig neues Einteilungsprinzip der Geometrien mit Hilfe des Begriffs der Abbildungsgruppen hat Felix Klein 1872 in seinem berühmt gewordenen „Erlanger Programm" angegeben. Dabei sind für jede Abbildungsgruppe die invarianten Eigenschaften bestimmend und es ergibt sich ein logisch zwingender Aufbau der verschiedenen Teilgebiete der Geometrie. Diese abbildungsgeometrischen Gesichtspunkte werden seit der Reform des Mathematikunterrichts in den 60er Jahren an den Schulen vermittelt und sind inzwischen zum Allgemeinwissen vieler Schülergenerationen geworden.

Ehe ich aber den grundlegend neuen Aufbauplan der Geometrien nach Felix Klein darstelle, halte ich es für nötig, für die mit der neueren Mathematik weniger Vertrauten wenigstens die Begriffe Abbildung, Invarianz und Gruppe kurz zu erläutern. Zwar war bei der Besprechung der projektiven Geometrie schon die Rede von Abbildungen und dabei invarianten Größen, doch sollen die Begriffe jetzt etwas genauer gefaßt werden.

Abbildung: Von einer geometrischen Abbildung (oder Transformation) spricht man, wenn jedem Punkt der ursprünglichen Figur auf Grund einer eindeutigen Zuordnungsvorschrift ein Punkt der Bildfigur zugeordnet wird.

Als Beispiele für Abbildungen der Punkte einer Ebene in dieselbe Ebene möchte ich die Verschiebung einer geometrischen Figur oder die Achsenspiegelung nennen. Eine Abbildung der Punkte einer Ebene auf eine andere Ebene ist z. B. die Projektion eines Dia auf die Leinwand.

Invarianz: Eine wichtige Rolle bei den Abbildungen spielen die jeweiligen „*Invarianten*" (Unveränderliche), das sind die Größen, die bei der Abbildung nicht verändert werden. Beispielsweise sind bei der Achsenspiegelung Streckenlänge und Winkelgröße invariant (das Abbild ist ja deckungsgleich mit dem Urbild), jedoch ändert sich der Drehsinn, so daß eine Schrift eben „spiegelbildlich" erscheint. Bei der Projektion eines Dia auf die Leinwand sind die Winkelgrößen invariant, jedoch nicht mehr die Streckenlänge (deshalb wird ja gerade projiziert, damit man ein ähnliches, aber größeres Bild erhält!). Sind aber Dia und Projektionsleinwand nicht parallel, gibt es „Bildverzerrungen". Jetzt ist auch die Winkelgröße als Invariante verloren gegangen und vorher parallele Linien laufen auseinander. Erhalten geblieben ist aber immer noch die gegenseitige Lage der abgebildeten Figuren.

Gruppe: Den Begriff der Gruppe möchte ich zum besseren Verständnis erst einmal an Zahlenmengen erklären.

Eine Menge von Zahlen heißt *Gruppe*, wenn bestimmte Gesetze der Verknüpfung (d. h. Addition oder Multiplikation) der Zahlen erklärt sind, nämlich

I) Die Menge soll *abgeschlossen* sein, d. h. die Verknüpfung zweier Elemente der Menge soll wieder ein Element der Menge ergeben. (z. B. ergibt die Summe der natürlichen Zahlen 3 und 5 die natürliche Zahl 8, dagegen ist die Summe der ungeraden Zahlen 3 und 5 keine ungerade Zahl. Die natürlichen Zahlen sind also bezüglich der Addition „abgeschlossen", die ungeraden Zahlen nicht.)

II) Die Menge soll das *Neutralelement* enthalten. (Das Neutralelement der Addition ist die Zahl 0, denn $a + 0 = a$, das Neutralelement der Multiplikation die Zahl 1, denn $a \cdot 1 = a$)

III) Zu jedem Element soll in der Menge das *inverse Element* bestehen, so daß die Verknüpfung von Element und inversem Element das Neutralelement ergibt. (Zu 5 ist das inverse Element der Addition die Zahl -5, denn $5 + (-5) = 0$)

IV) Weiter soll das *Assoziativgesetz* gelten. (Für die Addition heißt das $(a + b) + c = a + (b + c)$, Summanden dürfen beliebig zu Teilsummen zusammengefaßt werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert!)

Ähnlich wie für die Addition oder Multiplikation von Zahlen Gruppeneigenschaften festgelegt werden, läßt sich das auch für geometrische Abbildungen tun. Anstelle der Verknüpfung „Addition" oder „Multiplikation" der Zahlen tritt jetzt die Verknüpfung „Hintereinanderausführen" von Abbildungen. So können z. B. mehrere Verschiebungen nacheinander ausgeführt werden und man kann fragen, ob man statt dessen nicht auch dasselbe Ergebnis mit einer einzigen Verschiebung hätte erreichen können, ob also Verschiebung + Verschiebung wieder eine Verschiebung ergibt (oder ob die zweimalige Spiegelung auch durch eine einzige Spiegelung hätte ersetzt werden können).

Als Abbildungsgruppe bezeichnet man eine Menge von Abbildungen wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I) *Abgeschlossenheit:* Die Verknüpfung (das Hintereinanderausführen) zweier Abbildungen ist wieder eine Abbildung desselben Typus (z. B. lassen sich zwei Verschiebungen durch eine einzige ersetzen, während zwei Achsenspiegelungen nicht durch eine einzige Achsenspiegelung ersetzt werden können, da sich nach einer Spiegelung der Drehsinn der Figur ändert, nach der zweiten Spiegelung aber der Drehsinn der ursprünglichen Figur wieder eintritt).

II) Es soll ein *Neutralelement* existieren, d. h. eine Abbildung, die den Zustand nicht ändert. (Das ist bei den Verschiebungen die Verschiebung mit der Länge Null)

III) Zu jeder Abbildung soll es ein *inverses Element*, also eine Rückabbildung, geben (das wäre bei den Achsenspiegelungen die nochmalige Spiegelung an derselben Achse, bei der Drehung einer Figur um 90° eine weitere Drehung um denselben Drehpunkt um 270°, so daß die Figur wieder in die ursprüngliche Lage kommt).

IV) Das *Assoziativgesetz* soll gelten (d. h. bei drei aufeinanderfolgenden Abbildungen A, B, C soll $(A + B) + C = A + (B + C)$ gelten, so daß beliebig erst A, B und dann C ausgeführt werden darf, oder aber es werden erst B und C miteinander verknüpft und dann dieses Ergebnis nach der Abbildung A ausgeführt!).

Bevor wir uns nun dem Erlanger Programm selbst zuwenden, soll ein kurzer Rückblick auf die Entstehung der Gruppentheorie und den uns heute so geläufigen Gruppenbegriff seine Stellung im geschichtlichen Zusammenhang verdeutlichen.[46] Die Gruppentheorie wird heute in den verschiedensten Teilgebieten der ganzen neueren Mathematik als ordnendes und klärendes Prinzip verwendet. Zuerst wurde der Gruppenbegriff wohl 1770 von Lagrange zur Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades verwendet.

---

46) s. Literaturangabe (6), S. 334 ff.

Später hat sich Cauchy vor allem mit der Gruppe der Vertauschungen von n Buchstaben beschäftigt. Ihre zentrale Bedeutung für die algebraischen Gleichungen erhielt die Gruppentheorie erst 1831 durch Galois. Die erste zusammenfassende Darstellung der Auflösung algebraischer Gleichungen mit Hilfe des Gruppenbegriffs führte dann Camille Jordan 1870 durch, während Felix Klein und der Norweger Sophus Lie es unternahmen, den Gruppenbegriff auf die verschiedensten Gebiete der Mathematik anzuwenden, Felix Klein insbesondere 1872 in seinem „Erlanger Programm" auf Fragestellungen der Geometrie.

Aufbauend auf Arbeiten von Cayley, der eine systematische Theorie der Invarianten entwickelt hatte, (er hatte Aussagen der projektiven Geometrie durch Hinzunahme komplexwertiger Koordinaten verallgemeinert und so die metrische Geometrie in die projektive Geometrie eingefügt, und mit der nach ihm benannten „Cayleyschen Maßbestimmung" die Möglichkeit geschaffen, Euklidische und Nichteuklidische Geometrien unter gemeinsamen Gesichtspunkten zu sehen) stellte Felix Klein in Zusammenarbeit mit dem Norweger Sophus Lie sein Ordnungsprinzip der Geometrien nach Abbildungsgruppen auf. Unter dem Titel „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"[47] veröffentlichte er 1872 sein Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen. (Es war damals an der Erlanger Universität üblich, daß ein neu eintretender Professor in einer Schrift seine künftige wissenschaftliche Arbeit programmatisch darstellte.) Diese Schrift hat in der Folgezeit als „Erlanger Programm" in der Mathematik eine weltweite Bedeutung erlangt. Klein gibt darin als Einteilungsprinzip aller Geometrien die Zusammenfassung zu Abbildungsgruppen (oder Transformationsgruppen) an, die gemeinsame, unveränderliche (invariante) Abbildungseigenschaften besitzen. Den Anfang der Schrift möchte ich hier wörtlich wiedergeben:

> „Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der projectivischen Geometrie die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projiciren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projectivischen Standpunkte aufzufassen, so daß nun die projectivische Methode die gesamte Geometrie umspannt. …
>
> Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Principe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger als sich neben die elementare und die projectivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht zu selbständiger Existenz zugestehen muß. Dahin gehören die Geometrie der reciproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen etc., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.
>
> Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Princip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disciplinen zerfallen ist, die sich ziemlich unabhängig voneinander weiter bilden. …"

---

47) s. Literaturangabe (7).

Als allgemeine Problemstellung gibt Klein dann an (wobei hier Mannigfaltigkeit etwa mit Menge der Punkte einer Ebene oder des Raumes umschrieben werden kann):

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden."

Oder etwas später auch kürzer: „Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie."

An Kleins Auffassung sind drei Gesichtspunkte wesentlich:

1. die invariantentheoretische Betrachtungsweise überhaupt,
2. die Tatsache, daß die Transformationen (Abbildungen), die eine Gruppe bilden, auch einen Zweig der Geometrie darstellen,
3. die Möglichkeit, die einzelnen Geometrien nach dem Prinzip der Gruppen und Untergruppen zu ordnen.

Die Gruppe der Kongruenzabbildungen etwa ist eine Untergruppe der Ähnlichkeitsabbildungen, und damit sind die allgemeineren Gesetze der Ähnlichkeitsgeometrie auch in der Kongruenzgeometrie gültig. Die Invarianten der allgemeineren Gruppe sind stets auch solche der spezielleren.

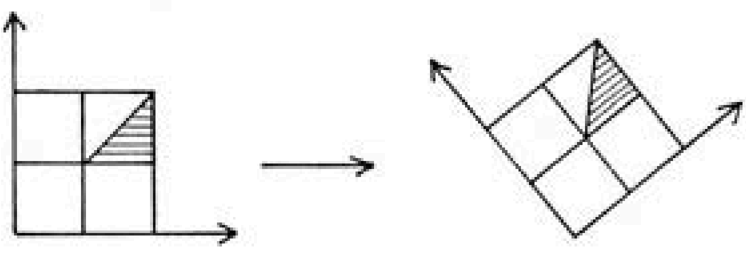
Die Abbildungsgruppen lassen sich damit folgendermaßen ordnen:

a) die Gruppe der Kongruenzabbildungen,
b) die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen,
c) die Gruppe der affinen Abbildungen,
d) die Gruppe der projektiven Abbildungen,
e) die Gruppe der topologischen Abbildungen.

In der folgenden Grafik (Abb. 10) sind diese Abbildungen als Abbildungen der Punkte einer Ebene auf sich bildlich dargestellt:

Abb. 10. Abbildung der Punkte einer Ebene auf sich.

a) Kongruenzabbildung (z. B. Drehung, Verschiebung, Spiegelung)



b) Ähnlichkeitsabbildung (z. B. maßstabsgetreues Vergrößern)

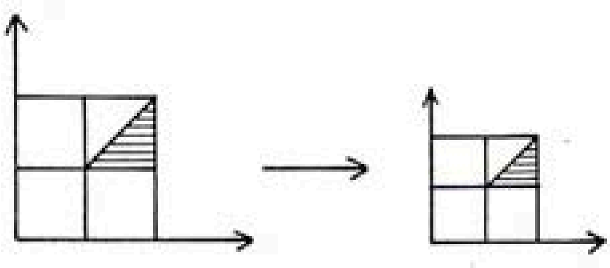
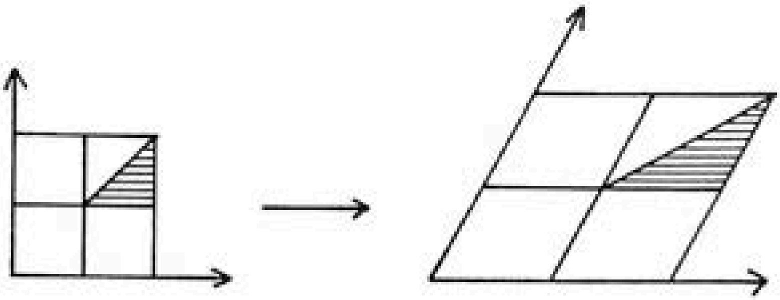
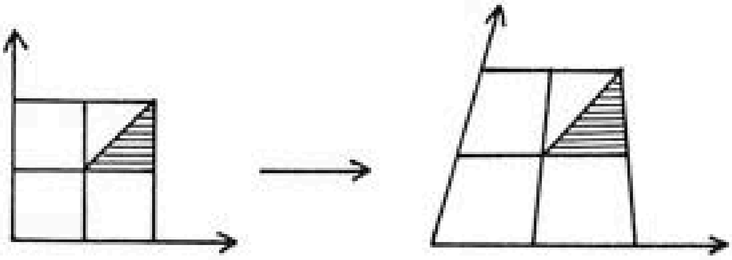


Abb. 10:

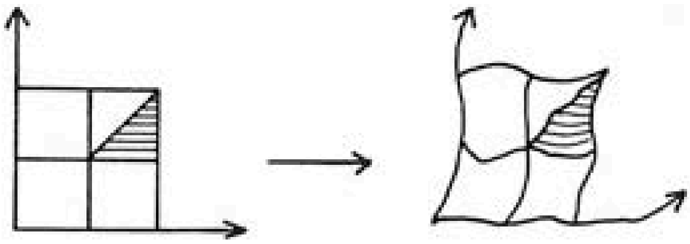
c) Affine Abbildung
(z. B. Schattenbildung im Sonnenlicht)



d) Projektive Abbildung
(z. B. perspektivisches Zeichnen)



e) Topologische Abbildung
(z. B. Bildverzerrungen eines Gummituches)

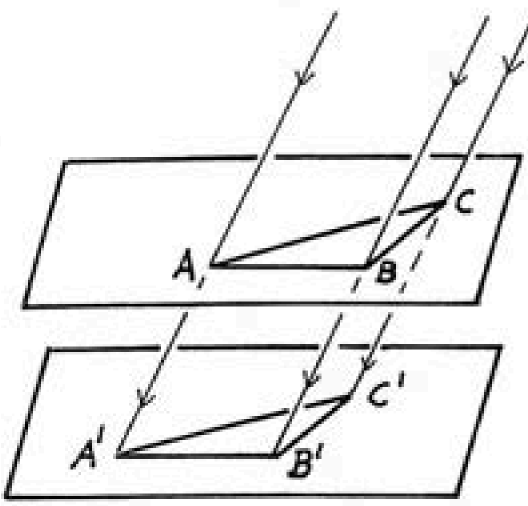


Einige der bei diesen Abbildungen jeweils invarianten Größen zeigt folgende Tabelle:

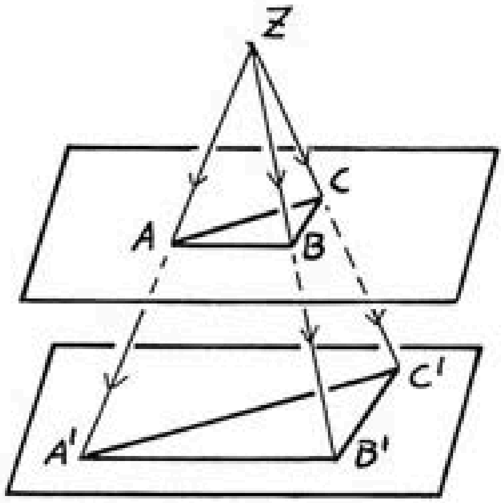
	Kongruenz-Abb.	Ähnlichkeits-Abb.	affine Abb.	projekt. Abb.	topolog. Abb.
Abstand	×				
Winkelgröße	×	×			
Streckenverhältnis	×	×			
Parallelität	×	×	×		
Doppelverhältnis	×	×	×	×	
Geradlinigkeit	×	×	×	×	
Lage eines Punktes im Inneren	×	×	×	×	×

Für die Abbildung der Punkte einer Ebene auf eine zweite Ebene ergibt sich folgendes Bild:

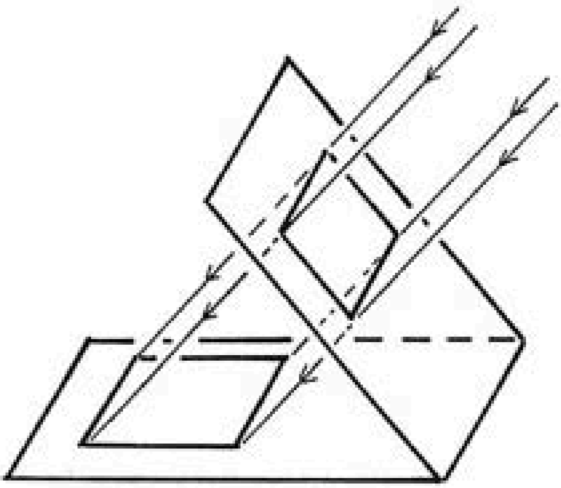
Abb. 11: Abbildung der Punkte einer Ebene auf eine zweite Ebene.



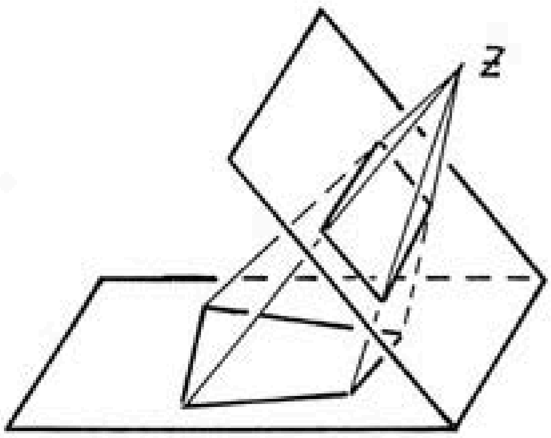
a) Kongruenzabbildung (Parallelprojektion auf zueinander parallele Ebenen)



b) Ähnlichkeitsabbildung (Zentralprojektion auf zueinander parallele Ebenen)



c) Affine Abbildung (Parallelprojektion auf Ebenen in beliebiger Lage)



d) Projektive Abbildung (Zentralprojektion auf Ebenen in beliebiger Lage)

Das Erlanger Programm stellt für die Geometrie ein Ordnungsprinzip dar, wie es das Periodensystem der Elemente für die Chemie ist. Dabei zeigt es sich, daß mit Hilfe der Abbildungsgruppen nicht nur eine Ordnung der Geometrien durchgeführt werden kann, sondern daß überhaupt eine Geometrie mit Hilfe der Abbildungsgruppe definiert werden kann und umgekehrt jeder Abbildungsgruppe auch eine besondere Geometrie entspricht.

Neben den hier aufgeführten Geometrien gibt es noch weitere, so etwa die Liniengeometrie, die Geometrie der reziproken Radien, Lies Kugelgeometrie usw., die sich alle entsprechend dem Erlanger Programm ordnen lassen. Allerdings gibt es auch Geometrien, die sich nicht in den Rahmen des Erlanger Programms einfügen, wie die Riemannschen Geometrien und das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum der allgemeinen Relativitätstheorie.

Für die Bedeutung des Erlanger Programms spricht es, daß es wohl das meistgelesene mathematische Werk der letzten 100 Jahre ist. Es hat das Verständnis vom Wesen der Geometrie so gründlich geprägt, daß der englische Mathematiker W. V. D. Hodge 1955 von der „Tyrannei des Erlanger Programms" sprechen konnte und die Hoffnung ausdrückte, daß „seine Tage gezählt" seien.[48] Das Gegenteil ist jedoch eingetreten: Seit den 60er Jahren sind in zunehmendem Maße die Gedanken des Aufbaus der Geometrie nach Abbildungsgruppen in die Schulmathematik eingedrungen.

5. *Paul Gordan: Invariantentheorie*

Welche Bedeutung die Invarianten der Abbildungsgruppen für den Aufbau der Geometrie besitzen, hatten wir schon in den vorangegangenen Abschnitten gesehen. Damit gehört die Invariantentheorie zu dem unerläßlichen Rüstzeug, das der Geometer benötigt und deshalb soll hier auch auf Fragestellungen der Invariantentheorie kurz eingegangen werden.

Die Invariantentheorie war, ehe sie auf geometrische Fragen angewendet wurde, aus der Zahlentheorie entstanden, wo bereits in Gauß' Disquisitiones Arithmeticae einer der Hauptgegenstände das Studium der binären quadratischen Formen, also zweigliedriger Ausdrücke der Form $(ax + by)^2$ oder $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ war. Insbesondere wird die Frage untersucht, wie sich f verändert, wenn die Substitution $x = a_1x' + b_1y'$, $y = a_2x' + b_2y'$ durchgeführt wird. Die Größen, die sich bei dieser Substitution nicht ändern, können als Determinanten geschrieben werden. Dementsprechend bildet die Lehre von den Determinanten die unmittelbare Vorstufe zur modernen Invariantentheorie und Paul Gordan behandelt im 1. Band seiner Vorlesungen über Invariantentheorie auch ausschließlich Determinanten. Erst im 2. Band geht er zu den Binären Formen über.[49]

Die Anwendung der Invariantentheorie auf die Geometrie ermöglicht dann die lückenlose systematische Aufzählung aller Invarianten einer bestimmten Geometrie. Die im Erlanger Programm angesprochene Einteilung der Geometrien nach Abbildungsgruppen und damit eine vollständige Systematik der Geometrie auf analytischer Basis gelingt exakt erst mit Hilfe der Ergebnisse der Invariantentheorie.

Thema der Invariantentheorie ist also nicht die Vermeidung von Rechnungen, wie in der synthetischen Geometrie, sondern die Durchführung der Rechnung in einer systematisierten Form, welche die Unabhängigkeit von beliebigen linearen Substitutionen der Variablen deutlich hervortreten läßt.

Als Objekte der Invariantentheorie unterscheidet man einmal irgendwelche einzelne Wertsysteme von Variablen, die man geometrisch als Punkte in Abhängigkeit von ihren Koordinaten bezeichnen kann, und zum anderen Funktionen von Variablen. Dabei werden die homogenen rationalen ganzen Funktionen in der Invariantentheorie auch Formen genannt. Binäre Formen sind dementsprechend Funktionen von zwei Variablen der Form $(ax + by)^n$.

Als hervorragende Vertreter der Invariantentheorie sollen neben Paul Gordan hier noch Jacobi und Hesse, die Engländer Cayley, Sylvester und Salmon, sowie die Italiener Briosche, Cremona und Beltrami genannt werden.

Das zentrale Problem der Invariantentheorie ist nun die Frage, ob und wie man für jedes System alle Invarianten erhalten kann und welches das System der geringsten Zahl von

48) s. Literaturangabe (8), S. 159.

49) Paul Gordan: Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Georg Kerschensteiner. 1. Band (Determinanten) 1885, 2. Band (Binäre Formen) 1887, BG Teubner, Leipzig.

Invarianten ist, aus denen sich sämtliche Invarianten aufbauen lassen. Paul Gordan gelang es 1868 als erstem in dem nach ihm benannten Gordanschen Endlichkeitstheorem zu beweisen, daß es zu jeder endlichen Anzahl vorgegebener Größen stets ein solches endliches „volles Invariantensystem" gibt, d.h. endlich viele Invarianten, aus denen sich alle anderen zusammensetzen. Der Beweis hat einen Umfang von 32 Druckseiten. Abgedruckt ist er im 69. Bande von Borcherts Journal[50] und in Gordans „Vorlesungen über Invariantentheorie".[51]

In wesentlich einfacherer Form konnte später David Hilbert diese Frage zum Abschluß bringen.[52] Felix Klein schreibt darüber:[53]

> „Der Beweis des Hilbertschen Satzes ... ist sehr abstrakt, aber an sich ganz einfach und darum logisch zwingend. Eben darum leitet die Arbeit von Hilbert eine neue Epoche der algebraischen Geometrie ein.
>
> Ebenso einfach ist dann auch die Anwendung auf die Invariantentheorie ... Die ganze Frage der Endlichkeit der Invarianten, welche G o r d a n seinerzeit nur mit umfangreichen Rechnungen für binäre Formen hatte erledigen können, wird hier mit einem Schlage für Formen mit beliebig vielen Veränderlichen gelöst.
>
> Ihrer Eigenart entsprechend wurde diese Arbeit zunächst mit sehr verschiedener Stimmung aufgenommen. ... Gordan war anfangs ablehnend: ‚Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie.' Später sagte er dann wohl: ‚Ich habe mich überzeugt, daß auch die Theologie ihre Vorzüge hat.' In der Tat hat er den Beweis des Hilbertschen Grundtheorems selbst später sehr vereinfacht (Münchener Naturforscherversammlung 1899)."

6. Max Noether: Algebraische Geometrie

Im Anschluß an die Invariantentheorie entwickelte sich Ende des 19. Jahrhunderts die algebraische Geometrie. Alexander von Brill und Max Noether gaben 1874 in der gemeinsam verfaßten großen Abhandlung „Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie" eine umfassende Darstellung der Lehre von den algebraischen Kurven.[54] Auf dieser Arbeit baut die weitere Entwicklung auf, so daß Strubecker Brill und Noether als Begründer der algebraischen Geometrie bezeichnet.[55] Seitdem stellt die algebraische Geometrie das bedeutendste Bindeglied zwischen Geometrie und Algebra dar. Ihre Grundfiguren sind Kurven, Flächen und Mannigfaltigkeiten samt ihren Schnitten. Insbesondere werden die Invarianten dieser Figuren bei birationalen Transformationen untersucht.

Ich kann im Rahmen dieser Schrift auf die Arbeiten Max Noethers selbst nicht genauer eingehen, sondern muß mich darauf beschränken, zum Verständnis der Fragestellungen der algebraischen Geometrie den Begriff der birationalen Transformation zu erläutern. Dazu ist es allerdings nötig, etwas weiter auszuholen.[56]

---

50) Journal für die reine und angewandte Mathematik (Fortsetzung des von Crelle 1826–1856 und Borchert 1856–1880 herausgegebenen Journals) Bd. 69 (1868), S. 323–354.

51) s. Anmerkung 49, Bd. 2, S. 231 ff.

52) Mathematische Annalen, Bd. 36 (1890), S. 473 ff.

53) s. Literaturangabe (6), S. 330/331.

54) Brill und Noether: Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie. In: Mathematische Annalen, Bd. 7 (1874) S. 269–310.

55) Karl Strubecker: Geometrie, Darmstadt 1972, S. 13.

56) Ich folge in der Darstellung der Punktabbildungen Felix Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. II, S. 42 ff und S. 74 ff.

Einer Punkttransformation (ich beschränke mich hier auf Abbildungen von Punkten in der Ebene) entspricht in der analytischen Geometrie die Einführung neuer Veränderlicher x', y', die als Funktionen der ursprünglichen Veränderlichen x, y gegeben sind. Eine Abbildung kann in der Geometrie z. B. durch Verschiebung, Drehung, Spiegelung oder Änderung des Maßstabes erfolgen. Für einige einfache Beispiele will ich hier die zugehörigen Abbildungsgleichungen angeben:

Die Gleichungen der Verschiebung sind

$$x' = x + c_1$$
$$y' = y + c_2$$

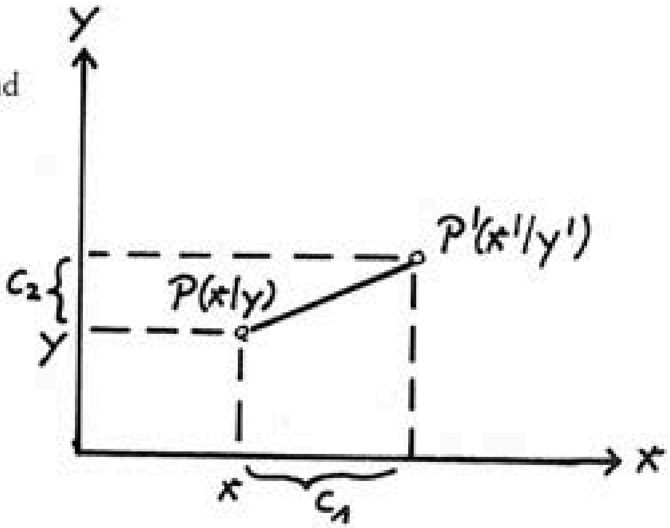


Abb. 12: Verschiebung eines Punktes.

Die Gleichungen der Drehung um den Koordinatenursprung sind

$$x' = a_1x + b_1y$$
$$y' = a_2x + b_2y.$$

Die Spiegelung am Koordinatenursprung erhält man durch

$$x' = -x$$
$$y' = -y.$$

Die Maßstabsänderung wird durch

$$x' = \lambda \cdot x$$
$$y' = \lambda \cdot y \quad \text{mit } \lambda > 0$$

angegeben.

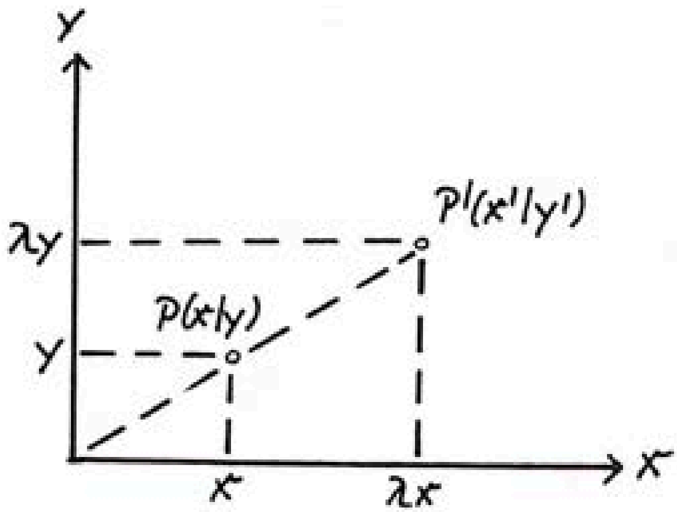


Abb. 13: Maßstabsänderung.

Nun können diese vier Abbildungen natürlich miteinander verknüpft werden. So erhält man als allgemeinste Abbildung dieser Art die affine Transformation

$$x' = a_1x + b_1y + c_1$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2.$$

Hierin sind x' und y' beliebige ganze lineare Funktionen von x, y.

Die analytische Definition der projektiven Transformation erhält man, wenn x', y' nicht mehr ganze, sondern gebrochene lineare Funktionen von x, y sind und – das muß einschränkend dazu gesagt werden – denselben Nenner haben. Also

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}$$

$$y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

Sofern der Nenner $a_3x + b_3y + c_3$ von Null verschieden ist, erhält man einen bestimmten endlichen Punkt $P'(x'/y')$. Nähert sich der Nenner aber dem Wert Null, so entflieht gewissermaßen der Punkt P' ins Unendliche, wir sprechen dann von dem unendlich fernen Punkt oder Fluchtpunkt, wie das ja geometrisch anschaulich in Abbildung 4 im Abschnitt über projektive Geometrie gezeigt wurde.

Nun können natürlich auch Transformationen untersucht werden, die nicht mehr durch lineare, sondern durch höhere rationale, algebraische oder auch transzendente Funktionen dargestellt werden. Z. B. gelten für die Transformation durch reziproke Radien die Abbildungsvorschriften

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Hier ist der Nenner keine lineare Funktion mehr, sondern eine rationale Funktion. Gilt zudem, wie das hier der Fall ist, auch die Umkehrung

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$$

$$y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

in eindeutiger Weise, so spricht man von einer birationalen Transformation. In dem angegebenen Beispiel handelte es sich, da der Nenner eine quadratische Funktion darstellt, um eine sog. quadratische birationale Transformation.

Die Untersuchung der Invarianten bei birationalen Transformationen ist also das Arbeitsgebiet der algebraischen Geometrie.

Die Beiträge Max Noethers zur algebraischen Geometrie beginnen mit der 1873 in den Mathematischen Annalen veröffentlichten Arbeit „Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen",[57] später als „Noetherscher Satz" bezeichnet. 1874 folgte die gemeinsam mit Alexander von Brill verfaßte, schon erwähnte große Darstellung der Lehre von den algebraischen Kurven. Auch die 1882 veröffentlichte Schrift zur „Theorie der algebraischen Raumkurven"[58] wird von Felix Klein in seinen Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jh. als hervorragende Leistung gewürdigt.[59]

Das allgemeine Problem der birationalen Transformationen der Flächen ist dann insbesondere von der jungen italienischen Schule (Segre, Veronese, Enriques, Castelnuovo, Severi) weiterentwickelt worden. Heute bedient sich die algebraische Geometrie der auf Emmy Noethers, der Tochter Max Noethers, Ideen beruhenden modernen Algebra, wie sie besonders von Artin und van der Waerden weiterentwickelt wurde. So möchte ich im nächsten Abschnitt auch noch ein paar Worte zu Emmy Noethers algebraischen Arbeiten sagen und wenigstens den von ihr geprägten Begriff des „Noetherschen Ringes" erläutern.

7. *Emmy Noether: Der Noether-Ring*

Zwar gehören die Arbeiten Emmy Noethers zur Idealtheorie nicht unmittelbar zum Thema, doch können idealtheoretische Methoden zur Begründung der algebraischen Geometrie herangezogen werden, wie es W. Gröbner 1954 in dem Bericht „Über die idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie" getan hat.[60] Deshalb möchte ich auch im Rahmen dieser Arbeit die Arbeiten Emmy Noethers zur Algebra kurz erwähnen.

Schon im 19. Jh. hatten deutsche Mathematiker neben der Axiomatisierung der Geometrie auch die Axiomatisierung der Algebra stark vorangetrieben. Die ersten bedeutenden Arbeiten zur Untersuchung der allgemeinen kommutativen Ringe lieferte Emmy Noether in ihren beiden großen Abhandlungen zur Idealtheorie von 1921 und 1927.[61] Ihre besondere Stärke liegt in der klaren Herausarbeitung der abstrakten Strukturen wie Ring, Modul, Gruppe, Körper, Ideal usw. Mit Emmy Noethers Namen verbunden bleibt dabei der Begriff des nach ihr benannten „Noetherschen Ringes". Ich will versuchen, diesen Begriff wenigstens in groben Zügen verständlich zu machen.

Im Anschluß an das, was in dem Abschnitt über das Erlanger Programm Felix Kleins zu Gruppenbegriff und Invarianten gesagt wurde, ist es nun allerdings noch erforderlich, auch die Begriffe Ring und Ideal zu erläutern.

R i n g: Eine Menge R heißt R i n g, wenn zwischen zwei Elementen zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) definiert sind und dabei folgende Gesetzmäßigkeiten gelten:

1. Die Menge bildet bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe.
2. Die Multiplikation ist in der Menge eindeutig und assoziativ.
3. Addition und Multiplikation sind durch Distributivgesetze $[(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c]$ verbunden.

---

57) Max Noether: Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. In: Mathematische Annalen, Bd. 6 (1873), S. 351–359.

58) Max Noether: Theorie der algebraischen Raumkurven. In: Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 93 (1882), S. 271–318 (Auszug aus der von der kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1882 mit dem Steinerschen Preis gekrönten Abhandlung gleichen Titels).

59) s. Literaturangabe (6), S. 312–313.

60) W. Gröbner: Über die idealtheoretische Grundlegung der algebraischen Geometrie. Bericht in Amsterdam 1954, abgedruckt bei Karl Strubecker: „Geometrie", Darmstadt 1972, S. 90–99.

61) Emmy Noether: Idealtheorie in Ringbereichen. In: Math. Annalen, Bd. 83 (1921) S. 24–66.

Emmy Noether: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. In: Math. Annalen, Bd. 96 (1927), S. 26–61.

So bildet z. B. die Menge der ganzen Zahlen einen Ring.

Ein Zahlenausdruck der Form $5x^3 - 3x + 6$ heißt Polynom. Auch die Menge aller Polynome der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, wobei $n \in N$ und $a \in R$, bildet einen Ring, den Ring der Polynome. Begriffe wie Gruppe oder Ring sind also keineswegs auf Zahlenmengen beschränkt, sondern können, wie man am Ring der Polynome oder der Abbildungsgruppe sieht, in einem viel weiteren Sinne angewendet werden.

I d e a l: Eine Teilmenge I eines Ringes R heißt I d e a l, wenn die Differenz zweier Elemente wieder ein Element der Menge und jedes beliebige Vielfache eines Elementes ebenfalls Element der Menge ist. In der Schreibweise der modernen Algebra ausgedrückt:

Eine Untergruppe I der additiven Gruppe $(R, +)$ eines Ringes $(R, +, \cdot)$ heißt (Rechts-) Ideal, wenn für alle $u \in I$ und alle $r \in R$ gilt $u \cdot r \in I$ (Entsprechend Linksideal, falls $r \cdot u \in I$ gilt).

Im Ring der ganzen Zahlen ist jede Teilmenge, die aus den Vielfachen einer ganzen Zahl besteht, ein Ideal; z. B. die Menge aller Vielfachen von 3, d. h. $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$.

N o e t h e r s c h e r R i n g: Ein Ring heißt (Links-) Noether-Ring, wenn jede (nichtleere) Menge von (Links-) Idealen ein maximales Element besitzt.

Beispiel: Der Ring der ganzen Zahlen. Hier wird jedes Ideal von einem Element erzeugt.

Auch hier wieder in der algebraischen Formelsprache: Ein kommutativer Ring R mit Einselement heißt Noether-Ring, wenn jedes Ideal I in R durch endlich viele Elemente a_ν erzeugt wird, d. h. jedes Element $\alpha \in I$ in der Form $\alpha = \sum_{\gamma=1}^{n} a_\nu \alpha_\gamma$ mit $a_\gamma \in R$ und $a_\gamma \in I$ darstellbar ist.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

(1) B l a s c h k e, W i l h e l m: Projektive Geometrie, 2. Auflage, Wolfenbüttel und Hannover 1948.

(2) Handbuch der Schulmathematik, herausgegeben von Georg Wolff, Schroedel-Verlag Hannover, 2. Auflage 1967, insbesondere die Kapitel Nichteuklidische Geometrie, Topologie und Erlanger Programm in den Bänden 4 und 5.

(3) H a u s e r, G.: Geometrie und Philosophie, 2. Auflage, Luzern 1946.

(4) J a e g e r, J o a c h i m: Elementare Topologie, UTB Schöningh 1980.

(5) K l e i n, F e l i x: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. 2 Geometrie, 3. Auflage 1925, Nachdruck 1968, Berlin.

(6) K l e i n, F e l i x: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Berlin, Springer 1926, Reprint 1979.

(7) K l e i n, F e l i x: „Erlanger Programm": Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Abgedruckt in den Mathem. Annalen Bd. 43, S. 63 ff (1893) und in Felix Klein: Gesammelte Math. Abhandlungen, Bd. I, S. 460 ff, Berlin, Springer 1921. Auch als Band 253 von Oswalds Klassikern der exakten Wissenschaften, Ed. H. Wußing, Leipzig 1974, sowie in „Geometrie", herausgegeben von Karl Strubecker, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1972, S. 118 ff

(8) M e s c h k o w s k i, H e r b e r t: Mathematiker-Lexikon, Bibl. Institut Mannheim, Wien, Zürich, 3. Auflage 1980.

(9) W u ß i n g, H a n s und A r n o l d, W o l f g a n g: Biographien bedeutender Mathematiker, Berlin, DDR 1975, Lizenzausgabe Aulis-Verlag Köln 1978.

Bildnachweis

Die Abbildungen 1 bis 13 zeichneten Bernhard Vogt und Gerhard Vogt.

Das Porträt von Karl Feuerbach wurde dem Buch von Theodor Spoerri, Genie und Krankheit, Basel 1952, S. 48, entnommen, das Foto von Karl von Staudt den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung 32 (1923), S. 97.

Die Universitätsbibliothek Erlangen stellte die Fotos von Felix Klein, Paul Gordan, Max und Emmy Noether freundlicherweise zur Verfügung.