

Seminar Cluster-Algebren

für Masterstudierende und Bachelorstudierende der Mathematik
Mo, 12:00 - 14:00 Uhr, Übungsraum 4

Dozentin:

Prof. C. Meusburger
catherine.meusburger@math.uni-erlangen.de
<http://www.algeo.math.uni-erlangen.de/meusburger>

Wintersemester 2025/26

1 Thema

Cluster-Algebren wurden 2002 von Fomin und Zelevinski eingeführt und bilden ein momentan sehr aktives Forschungsgebiet. Sie haben enge Verbindungen zu bestimmten Graphen und Köchern, zu Triangulierungen von Polygonen und Flächen, zur zwei-dimensionalen hyperbolischen Geometrie, zu Poisson- und symplektischer Geometrie, zu verschiedenen kombinatorischen und zahlentheoretischen Problemen sowie zur Theorie von Lie-Algebren und zur Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren.

Cluster-Algebren lassen sich als gewisse Unteralegebren von Körpern gebrochen-rationaler Funktionen in mehreren Variablen konstruieren. Die Art der Konstruktion ist allerdings ungewohnt: man beginnt mit gewissen Elementen und konstruiert daraus durch sogenannte *Mutationen* neue Elemente. Die Elemente, die sich auf diese Weise erzeugen lassen, bilden die Cluster-Algebra. Eine kurze Übersicht findet sich in *What is a Cluster-Algebra ?* [Z] von Zelevinski.

In diesem Seminar erarbeiten wir uns den Begriff der Cluster-Algebra und untersuchen interessante Beispiele und Anwendungen, insbesondere in der hyperbolischen Geometrie.

Voraussetzungen: Vorlesung Algebra. Für manche Vorträge sind Topologiekennntnisse, die Vorlesung Einführung in die Darstellungstheorie oder Grundkenntnisse zu Lie-Algebren hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich.

2 Organisatorisches

- **Teilnahme:** Wenn Sie an dem Seminar teilnehmen wollen, melden Sie sich bitte per StudOn an und schreiben Sie eine Email an die Dozentin.

- **Vorbesprechung: am 29. 09. 2025 um 16 Uhr** via Zoom

Zoom link:

<https://fau.zoom-x.de/j/5117402335?pwd=NlM3OFRBaTUzMTNHVON1VTFNWl1CZz09>

Wenn Sie an der Vorbesprechung nicht teilnehmen können, schreiben Sie mir bitte bis 29. 09. 2025 eine Email mit Ihren gewünschten Vortragsthemen. Später hinzukommende Studierende melden sich bitte per Email bei mir, treten auf StudOn bei und können dann unter den verbleibenden Themen wählen.

- Zu den Vorträgen ist ein Handout zu erstellen (5-10 Seiten) und vor dem Vortrag in elektronischer Form bei mir einzureichen. Die Handouts werden den Teilnehmer/innen auf der StudOn-Seite des Seminars zur Verfügung gestellt.

3 Gestaltung der Vorträge

- Jeder Vortrag sollte maximal 70 Minuten dauern, damit den Zuhörenden noch Zeit für Fragen bleibt.
- Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Tablet-vorträge oder Beamer- oder Power-Point Präsentationen sind nicht zulässig. Das Zeigen einzelner Grafiken, Tabellen oder Diagramme per Projektor ist natürlich erlaubt.
- Die wichtigsten Aspekte sind, dass Sie (i) genau verstanden haben, worüber Sie sprechen, und (ii) dass Ihr Vortrag die Inhalte in verständlicher und pädagogischer Weise an die Kommilitonen/innen vermittelt. Versuchen Sie, Ihren Vortrag so zu gestalten, dass Sie ihn selbst gerne hören würden und einen echten Mehrwert gegenüber dem Lesen des zugrundeliegenden Textes im Lehrbuch hätten. Hierzu können und sollen Sie selbstverständlich Details ergänzen oder weglassen oder Aussagen anders strukturieren.
- Die Theorie der Cluster-Algebren erscheint oft trügerisch einfach. Der Teufel steckt dann im Detail und zeigt sich bei der Behandlung von Beispielen. Geben Sie den Beispielen genügend Raum und behandeln Sie sie sorgfältig.
- Lesen Sie den Text kritisch und ergänzen Sie die Details, die dort weggelassen wurden (oft einfache Beweise, Übungen und Beispiele). Es ist nicht unbedingt nötig, diese an der Tafel darzustellen, aber Sie müssen sie verstanden haben und auf Nachfrage präsentieren können. Die Texte enthalten einige Theoreme, die den Rahmen des Seminars sprengen und für die auf die Forschungsartikel verwiesen wird. Diese Beweise müssen Sie natürlich nicht parat haben.

Sie müssen Ihren Textabschnitt wahrscheinlich mehrmals gründlich durcharbeiten, um ein gewisses Verständnis zu erzielen und viele in der Literatur nicht genau ausgeführte Schritte ergänzen. Verstehen Sie etwas auch nach gründlicher Beschäftigung mit dem Thema nicht, vereinbaren Sie bitte rechtzeitig einen Termin mit mir, um Ihre Fragen zu klären.

- Sie können zur Vorbereitung Ihres Vortrags auch andere als die angegebenen Quellen benutzen. Sie müssen aber alle benutzten Quellen (Lehrbücher, Webseiten, Artikel etc) auf Ihrem Handout angeben.
- Ein nützlicher Link mit allgemeinen Hinweisen zum Halten von Seminarvorträgen ist:
Prof. Lehn: Wie halte ich einen Seminarvortrag?
<http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag>.

4 Vortragsthemen

0. Vortrag: Motivation und Einführung:

Name: Catherine Meusburger

Termin:

4.1 Grundlagen

Diese Vorträge bauen aufeinander auf und werden für alle weiterführende Vorträge benötigt.

1. Köcher und Mutationen von Köchern*

Name:

Termin:

Inhalt: Köcher, mutierbare und eingefrorene Variable, Mutationen von Köchern; Köcher aus triangulierten Polygonen, Köcher aus Verdrahtungsdiagrammen und Doppel-Verdrahtungsdiagrammen, Mutationsäquivalenz, Mutationstyp, Th 2.6.11, Cor 2.6.12.

Abschnitte 2.1 - 2.4 und Abschnitt 2.6 in [FWZ1]; nötige Inhalte zu Verdrahtungsdiagrammen aus 1.3 und zu Doppel-Verdrahtungsdiagrammen aus 1.4.
pp 17–23, pp 25–28.

2. Mutationen von Matrizen und Invarianz*

Name:

Termin:

Inhalt: Austauschmatrix und erweiterte Austauschmatrix eines Köchers, Transformation unter Mutationen (2.7.3), schief-symmetrisierbare und erweiterte schief-symmetrisierbare Matrizen, Matrix-Mutationen, Eigenschaften von Matrix-Mutationen (Ex 2.7.7 mit Beweis), Schief-Symmetrisierung, Diagramm einer schief-symmetrisierbaren Matrix, Eigenschaften des Diagramms (Prop 2.7.11 und Lemma 2.7.13), Theorem 2.8.3 und 2.8.4.

Abschnitte 2.7 und 2.8 in [FWZ1]; pp 28–33.

3. Cluster and Saaten:*

Name:

Termin:

Inhalt: Erinnerung: Polynomringe in mehreren Variablen über $\mathbb{C}$, Körper der gebrochen rationalen Funktionen als Quotientenkörper des Polynomrings, algebraisch unabhängig. Saaten, (erweiterte) Cluster, Cluster-Variablen, (erweiterte) Austauschmatrix, Beschreibung durch Köcher, Mutationen von Saaten; Exercise 3.1.6, Saaten-Muster (Def 3.1.8), Cluster-Algebra; Beispiele von Rang 1 und Rang 2 (Auswahl);

Abschnitte 3.1 und 3.2 in [FWZ1]; pp 33–43.

4. Das Laurent-Phänomen*

Name:

Termin:

Inhalt: Erinnerung: Laurent Polynom; Theoreme 3.3.1 und 3.3.6 und Beweise; Beispiele aus 3.4 (Auswahl): Markov-Köcher, Markov-Tripel, Fermat-Zahlen;

Abschnitt 3.3 in [FWZ1]; pp 43–48; Teile von 3.4 in [FWZ1], pp 49–50.

5. *Y*-Saaten und *Y*-Muster, Einbettung und Einschränkung von Köchern und Matrizen*

Name:

Termin:

Inhalt:

Abschnitt 3.5 in [FWZ1]; Theorem 3.5.1; *Y*-Saaten, *Y*-Mutationen, *Y*-Muster, Cor 3.5.5, Beispiele: Bsp 3.5.8 (Punktkonfigurationen auf der projektiven Linie); projektive Linie einführen;

Einschränkungen von Matrizen und Köchern, Einschränkung kommutiert mit Mutationen, vererbte Eigenschaften, vom endlichen Typ sein ist vererbbar; Lemma 4.1.7; Einbettbarkeit von Mutationsklassen von Köchern; Einbettbarkeit ist vererbbar; Einfrieren von Cluster-Variablen; Einfrieren kommutiert mit Mutationen von Saaten; Untermuster von Saaten;

Abschnitt 3.5 in [FWZ1] pp 54–61; Abschnitte 4.1-4.2 in [FWZ2] pp 1-6.

6. Tropische Halbkörper und Koeffizientenwechsel*

Name:

Termin:

Inhalt: Tropische Halbkörper, tropische Addition, Gelabeltes Saaten-Muster vom Rang n , Lemma 3.6.3, Prop 3.6.5, Prop 3.6.9, Bsp 3.6.11,

Trivialisierung von Koeffizienten, Trivialisierung kommutiert mit Mutationen von Saaten, Theorem 4.3.4, Prop 4.3.5, Cor 4.3.6

Abschnitt 3.6 in [FWZ1]; 61–65 und Abschnitt 4.3 in [FWZ2]; 7–11.

4.2 Weiterführende Vorträge

Nach Einführung der Grundlagen kann das Seminar je nach Wünschen der Zuhörer:innen entweder die Klassifikation von Cluster-Algebren oder geometrische Anwendungen behandeln. Diese zwei Blöcke sind voneinander unabhängig. Der Block *Geometrische Anwendungen* ist eventuell interessanter, aber hier steht für die weiterführenden Vorträge 10 und 11 wenig zugängliche Lehrbuch-Literatur zur Verfügung, so dass Inhalte weitgehend selbst erarbeitet werden müssen. Im Block *Klassifikationsresultate* werden Cluster-Algebren vom endlichen Typ klassifiziert, wozu der Lehrbuchentwurf von Fomin, Williams und Zelevinski [FWZ1] und [FWZ2] benutzt werden kann.

4.2.1 Geometrische Anwendungen

Die folgenden Vorträge erarbeiten Grundlagen der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie und darauf aufbauend interessante eine Anwendung von Cluster-Algebren. Diese war eine der ursprünglichen Motivationen für die Untersuchung dieses Gebiets.

7. 2d hyperbolische Geometrie

Name:

Termin:

Inhalt: obere Halbebene $\mathbb{H}^2$, hyperbolische Länge, hyperbolischer Abstand, Struktur als metrischer Raum, Möbius-Transformationen, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ wirkt auf $\mathbb{H}^2$ durch Isometrien, Geodäten, Riemann-Sphäre, euklidischer Rand; Isometriegruppe, hyperbolischer Flächeninhalt und Flächeninhalt von hyperbolischen Dreieck;

Abschnitt 1.1 [K], Abschnitt 1.2 in [K] bis Theorem 1.2.6 inklusive, sowie euklidischer Rand auf Seite 9, Scheibenmodell in Abschnitt 1.2 soll weggelassen werden; Abschnitt 1.3 [K] nur Theorem 1.3.1, Abschnitt 1.4 [K], Theorem 1.4.1 und 1.4.2 ohne Beweis; ergänzende Literatur (alternative Quelle): Abschnitt 2.1 in [Se]

8. Fuchssche Gruppen

Name:

Termin:

Inhalt: elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente und ihre Fixpunkte, Norm auf $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, diskrete Untergruppe, Fuchssche Gruppe, eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung, Theorem 2.2.1, modulare Gruppe (Bsp A), Lemma 2.2.4, Lemma 2.2.5, Theorem 2.2.6 in [K]

Abschnitt 2.1 [K], wobei Theorem 2.1.1 weggelassen werden kann, Abschnitt 2.2 [K], wobei Theorem 2.2.3 weggelassen werden kann; ergänzende Literatur (alternative Quelle): Kapitel 4 in [Se]

9. Fundamentalgebiete und Riemannsche Flächen

Name:

Termin:

Inhalt: Fundamentalgebiet, Flächeninhalt, Dirichlet-Fundamentalgebiet, hyperbolische Konvexität, Dirichlet Fundamentalgebiet ist Fundamentalgebiet; Dirichlet-Fundamentalgebiet für $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$; Parkettierung, lokal endliche Parkettierung, Dirichlet-Fundamentalgebiet ist lokal endlich; Theorem 3.5.4: Dirichlet-Fundamentalgebiet liefert Erzeuger der Fuchsschen Gruppe, Bsp A; Riemannsche Flächen aus Fundamentalgebieten

Abschnitt 3.1 [K], Abschnitt 3.2 [K] komplett, Abschnitt 3.5 [K] bis Theorem 3.5.1 inklusive und Theorem 3.5.4, Abschnitt 3.6 in [K]
ergänzende Literatur (alternative Quelle): Abschnitte 5.1 und 5.2.1 in [Se], Abschnitt 5.3.3 in [Se], Abschnitt 6.1.1 in [Se], Bsp 6.9 in [Se], Abschnitt 7.1 in [Se]

10. Ideale Triangulierungen und Doppelverhältnisse

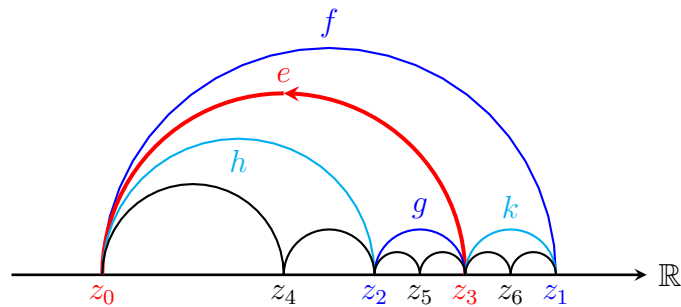
Name:

Termin:

Inhalt: Doppelverhältnis Abschnitt 4.1 in [Se]; Doppelverhältnis und der hyperbolische Abstand Prop 2.13 in [Se];

Wir betrachten Fuchssche Gruppen, deren Dirichlet-Fundamentalgebiete ideale Polygone sind, d. h. alle Vertizes liegen auf $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und die Seiten werden paarweise identifiziert. Wir triangulieren das Fundamentalgebiet durch Hinzufügen von Geodäten zwischen diesen Vertizes. Durch die Bilder dieses triangulierten Fundamentalgebiets erhalten wir eine Triangulierung des $\mathbb{H}^2$, deren Vertizes auf dem Rand liegen. Zu jeder Geodäte

e der Triangulierung definieren wir ein Doppelverhältnis Z_e , das durch die Vertizes der zwei angrenzenden Dreiecke gegeben ist



$$Z_e = \frac{(z_0 - z_1) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_0 - z_2) \cdot (z_3 - z_1)}$$

- (i) Überzeugen Sie sich, dass das Doppelverhältnis Z_e nicht von der gewählten Orientierung von e abhängt.
- (ii) Berechnen Sie die Transformation der Doppelverhältnisse Z_e, Z_f, Z_g, Z_h, Z_k , wenn die Geodäte e durch die andere Diagonale im geodätischen Viereck mit Ecken z_0, z_1, z_2, z_3 ersetzt wird; Drücken Sie sie durch eine Gleichung der Form

$$Z'_x = Z_x \cdot f_x(Z_e) \quad x \in \{e, f, g, h, k\}$$

und bestimmen Sie die Funktion f_x .

- (iii) Folgern Sie, dass die Transformation dieser Doppelverhältnisse durch die Formeln für Mutationen von Y -Mustern in Formel (3.5.2) [FWZ1] gegeben ist.
- (iv) Zeigen Sie, dass das ideale Polygon P durch die Doppelverhältnisse seiner Geodäten bis auf eine globale Isometrie in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ bestimmt ist. Folgern Sie, dass die Doppelverhältnisse seiner Geodäten eine Konjugationsklasse einer Fuchsschen Gruppe definieren.
- (v) Lesen Sie Abschnitt 1 und Abschnitt 4.1 in [FG] (als Hintergrund, um die Resultate in einen Kontext einzuordnen)

11. Cluster-Algebren aus orientierten Flächen

Name:

Termin:

Inhalt: Abschnitte 1.1 bis 1.6 sind Hintergrund, der bereits behandelt wurde, Abschnitt 1.7 kann weggelassen werden.

Abschnitt 2.1-2.3; Es kann ohne Informationsverlust angenommen werden, dass S statt einer Riemanschen Fläche eine glatte orientierte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Triangulierungen, Bogensysteme, Cluster Algebra für eine orientierte Fläche mit Rand, Abschnitte 3.1-3.3 Schlangengraphen und Bandgraphen, triangulierte Flächen aus Schlangengraphen, gelabelte Schlangengraphen aus triangulierten Flächen

Abschnitte 2.1-2.3 und 3.1-3.3 aus [S]

4.2.2 Klassifikationsresultate

In dieser Reihe von Vorträgen wird eine vollständige Klassifikation von Cluster-Algebren vom endlichen Typ erarbeitet. Es stellt sich heraus, dass diese Cluster-Algebren durch die Dynkin-Diagramme klassifiziert werden, die auch eine grundlegende Rolle in der Klassifikation von Lie-Algebren spielen.

12. Klassifikation von Saaten-Mustern vom endlichen Typ: Rang 2 Klassifikation, Cartan-Matrizen Dynkin Diagramme

Name:

Termin:

Inhalt:

Abschnitte 5.1 und 5.2 in [FWZ2]; pp 19-28

13. Saaten-Muster vom Typ A_n sind von endlichen Typ

Name:

Termin:

Inhalt:

Abschnitt 5.3 in [FWZ2]; pp 28–35

14. Saaten-Muster vom Typ D_n sind von endlichen Typ

Name:

Termin:

Inhalt: Abschnitt 5.4 in [FWZ2]; pp 35–49

15. Saaten-Muster vom Typ B_n und C_n sind vom endlichen Typ

Name:

Termin:

Inhalt:

Faltung Abschnitt 4.4 in [FWZ2] pp 11-17, Abschnitt 5.5 in [FWZ2] pp 45–49

16. Saaten-Muster vom Typ E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 sind vom endlichen Typ; Zerlegbare Saatenmuster, Abzählen von Clustern und Cluster-Variablen

Name:

Termin:

Inhalt: Abschnitte 5.6 und 5.7 nur grob skizzieren

5.6- 5.9 in [FWZ2], pp 49–56

17. Klassifikation durch 2-finite Austauschmatrizen

Name:

Termin:

Inhalt: Abschnitte 5.10 und 5.11 in [FWZ2], pp 56–65

Literatur

- [FG] Fock, V. V., & Goncharov, A. B. (2007). Dual Teichmüller and lamination spaces. Handbook of Teichmüller theory, 1(11), 647-684.
<https://arxiv.org/pdf/math/0510312>
- [FWZ1] Fomin, S., Williams, L., & Zelevinsky, A. (2017). Introduction to cluster algebras. arXiv preprint arXiv:1608.05735
<https://arxiv.org/pdf/1608.05735>
- [FWZ2] Fomin, S., Williams, L., & Zelevinsky, A. (2017). Introduction to cluster algebras. chapters 4-5. arXiv preprint arXiv:1707.07190.
<https://arxiv.org/pdf/1707.07190>
- [K] Katok, S. (1992). Fuchsian groups. University of Chicago press.
- [S] Schiffler, R. (2018). Cluster algebras from surfaces: lecture notes for the CIMPA School Mar del Plata, March 2016. In Homological methods, representation theory, and cluster algebras (pp. 65-99). Cham: Springer International Publishing.
- [Se] Series, C. Hyperbolic geometry MA 448. Online version (2013)
https://warwick.ac.uk/fac/sci/math/people/staff/caroline_series/hyperbolic_geometry_ma448_lecture_notes.pdf
- [Z] Zelevinsky, A. (2007). What is a cluster algebra. Notices of the AMS, 54(11), 1494-1495.
<https://www.ams.org/notices/200711/tx071101494p.pdf>