Ankündigung zur

Vorlesung „Approximationstheorie“

Art der Veranstaltung: Vorlesung, 3+1 SWS, 5 ECTS, Sommersemester 2026

Ansprechpartner: Prof. Dr. Cornelia Schneider *schneider@math.fau.de*

Inhalt: Untersuchungsobjekt der Approximationstheorie ist die Darstellung „komplizierter“ Objekte (meist Funktionen) durch einfachere Objekte, die sich mit endlicher Information darstellen lassen. Die Standardsituation ist ein normierter Raum X mit Norm $\|\cdot\|$ und ein meist endlichdimensionaler Teilraum $U \subset X$, dessen Elemente die „einfachen“ Funktionen sind. Zwei sehr wichtige Beispiele sind in diesem Zusammenhang

(1) $X = C[a,b]$, der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a,b]$ und

$$U = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\},$$

der $(n+1)$-dimensionale Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

(2) $X = C_{2\pi}(\mathbb{R})$, der Vektorraum aller stetigen 2π-periodische Funktionen und

$$U = \left\{ t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),\ a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\},$$

der $(2n+1)$-dimensionale Vektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$.

Das Ziel ist die Approximation ($\approx$ Annäherung) einer komplizierten Zielfunktion $f \in X$ durch eine geeignete Funktion p (bzw. t) aus dem Teilraum $U \subset X$. Der Approximationsfehler

$$E^{(\bullet)}(f) = \inf_{p \in \mathbb{R}} \|f - p\|_{\bullet} \qquad \text{(minimaler Fehler)}$$

wird hierbei gemessen durch die von der Norm $\|\cdot\|_{\bullet}$ induzierte Metrik, wobei z.B.

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}, \quad \|f\|_1 = \int |f(x)| \mathrm{d}x \qquad (*)$$

mögliche Normen sind.

Die Fragen, mit denen sich die Approximationstheorie beschäftigt, können nun folgendermaßen formuliert werden:

- Gibt es für alle $f \in X$ eine *Bestapproximation* $p^* \in U$ (bzw. $p^*_{(\bullet)} \in U$ in Abhängigkeit von der Norm $\|\cdot\|_{\bullet}$), d.h. eine Funktion, die

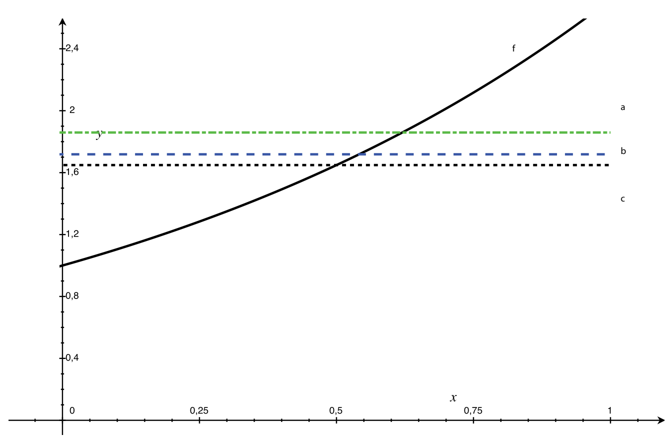
$$\|f - p^*\| \leq \|f - p\|$$

für alle $p \in U$ erfüllt?
- Wann ist die Bestapproximation p^* eindeutig?
- Wie lässt sich p^* konstruieren/ charakterisieren?
- Fehlerabschätzung: Betrachte Teilräume $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$ und zugehörige Fehler

$$E_n(f) := \inf_{p \in U_n} \|f - p\|.$$

Gilt z.B. $\lim_{n\to\infty} E_n(f) = 0$?

Beispiel: Approximation von $f = e^x \in C[0,1]$ durch bestmögliche Konstante $p \in \mathbb{R}$ in den versch. Normen $(*)$ und zugehöriger Approximationsfehler



$E^{(\infty)}(f) = 0.859, \quad E^{(2)}(f) = 0.492, \quad E^{(1)}(f) = 0.42$

Im Rahmen der Vorlesung behandeln wir u.a. die folgenden Themen:

(1) Klassische Aussagen der Approximationstheorie

- Satz von Weierstraß, Bernstein-Polynome, mehrdimensionale Verallgemeinerungen

(2) Klassische Aussagen der Approximationstheorie für periodische Funktionen

- Räume periodischer Funktionen, Approximation durch Integraloperatoren (Fejér-Kerne, Fourier-Reihen, De La Vallée Poussin-Mittel, Konvergenz in L_p)

(3) Bestapproximation

- Existenz und Eindeutigkeit in normierten Räumen, Bestapproximation durch algebraische Polynome in $C[a, b]$, Charakterisierngssatz von Kolmogorov, Bestapproximation durch orthogonale Projektoren in Hilberträumen

(3) Approximationsraten und Funkitonenräume

- Stetigkeitsmoduli, Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ, Approximationsräume

Vorkenntnisse: Grundvorlesungen Analysis sind wünschenswert. Die Vorlesung richtet sich an Bachelor- und Masterstudenten.

Literatur

[1] B. Carl and I. Stephani. *Entropy, compactness and the approximation of operators*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[2] R.A. DeVore und G. G. Lorentz. *Constructive Approximation*. Springer, Berlin, 1993.

[3] G.G. Lorentz. *Approximation of functions*. 2nd. Edition, Chelsea, New York, 1986.

[4] M.W. Müller. *Approximationstheorie*. Studien-Texte Mathematik. Akad. Verlagsges. Wiesbaden, 1978.

[5] A. Schönhage. *Approximationstheorie*. De Gruyter, Berlin 1971.