

Seminar im Bachelor und Master Mathematik

Dispersive Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2026/27

Lea Boßmann und Emil Wiedemann

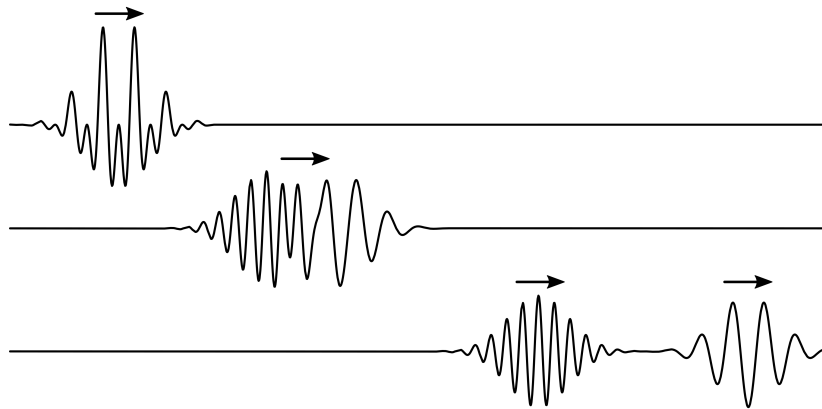
Dispersive partielle Differentialgleichungen (PDE) spielen eine zentrale Rolle in der mathematischen Physik. Zu den bekanntesten Beispielen gehören die (nichtlineare) Schrödingergleichung der Quantenmechanik,

$$i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0,$$

und die Klein-Gordon-Gleichung aus der Teilchenphysik,

$$-\partial_t^2 u + \Delta u - u = 0.$$

Beide Gleichungen sind *dispersiv*, d.h. verschiedene Frequenzanteile breiten sich verschieden schnell aus.



MikeRun, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons.

Wir werden im Verlauf des Seminars grundlegende Methoden zur Analysis dispersiver Gleichungen kennenlernen und auf lineare und nichtlineare Probleme anwenden (nichtlineare Schrödingergleichungen und nichtlineare Wellengleichungen).

Voraussetzungen: Analysis I - III.

Ort und Zeit: Donnerstags, 14-16 Uhr, Übung 2. Die Vorträge beginnen ab dem 22.10.

Anmeldung und Vorbesprechung: Anmeldung im StudOn-Kurs bis 30.9., Vorbesprechung am 15.10. um 14:15 Uhr in Übung 2.

Literatur:

- [C] Thierry Cazenave. *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 10, 2003.
- [E] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, Second Edition, 2015.
- [H] Chengchun Hao, *Lecture Notes on Harmonic Analysis*. Chinese Academy of Sciences, 2020.
- [T] Terence Tao, *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006.

Vortragsthemen

Die mit * gekennzeichneten Vorträge eignen sich besonders gut für Studierende im Bachelor. Die Betreuung der Vorträge übernehmen Lea Boßmann (LB) oder Emil Wiedemann (EW).

I. Grundlagen

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen (LB)*

Cauchy-Problem, starke/schwache/klassische Lösungen (Lemma 1.3), Grönwall'sche Ungleichung (Theorem 1.10), Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Theorem 1.17), semilineare ODE (Proposition 1.35)

[T], Kap. 1.1 (S. 5–7), Kap. 1.2 (S. 11–15), Kap. 1.6 (S. 40–44)

2. Fouriertransformation (EW)*

Fouriertransformation und erste Anwendungen auf lineare dispersive Gleichungen

[H], Kap. 2.1, Kap. 2.2 bis einschl. Theorem 2.2.3; [T], Kap. 2.1

II. Lineare dispersive PDE

3. Lineare dispersive Gleichungen mit konstanten Koeffizienten (LB)*

Dispersion, Beispiele (freie Schrödingergleichung, Wellengleichung, Airy-Gleichung), ebene Wellen, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, Dispersion vs. Dissipation

[T], Kap. 2.0 (S. 55–62); [E], Kap. 4.2.1a (S. 176–178)

4. Fundamentallösungen (LB)*

Fundamentallösung, Beispiele (freie Schrödingergleichung, Wellengleichung, Airy-Gleichung), Zerfließen der Lösungen der freien Schrödingergleichung

[T], Kap. 2.2 (S. 69–73); [E], Kap. 4.3.1, Bsp. 3 und 4 (S. 193–196); [C], Prop. 2.2.3 (S. 31–32)

5. **Strichartz-Abschätzungen** (EW)

[T], Kap. 2.3

III. Nichtlineare dispersive PDE

6. **Sobolewräume, schwache Ableitungen** (EW)

Definition und elementare Eigenschaften von schwachen Ableitungen und Sobolewräumen, Sobolew-Einbettungen, Poincaré-Ungleichung, der Dualraum H^{-1} , Fourier-Darstellung und reelle Exponenten

[E], Kap. 5.2, Kap. 5.6.1, Kap. 5.8.1, Kap. 5.9.1.

7. **Nichtlineare Schrödingergleichung** (LB)

Nichtlineare Schrödingergleichung (NLS), Erhaltungsgrößen, schwache/starke H^1 -Lösungen, Definition der lokalen Wohlgestelltheit in H^1 , typische Nichtlinearitäten (insbesondere $g(u) = \lambda|u|^\alpha u$), Skalierung und Symmetrien, (sub-/super-)kritische NLS

[C], Kap. 3.1 und 3.2 (S. 55–60); [T], Kap. 3.0 (S. 109–112) und Kap. 3.1 (S. 114–120)

8. **Nichtlineare Schrödingergleichung II: Eindeutigkeit in $H^1(\mathbb{R}^N)$** (LB)

Eindeutigkeit schwacher bzw. starker H^1 -Lösungen (Prop. 4.2.1 und 4.2.5)

[C], Kap. 4.2 (S. 83–88)

9. **Nichtlineare Schrödingergleichung III: Wohlgestelltheit in $H^1(\mathbb{R}^N)$** (LB)

Lokale Wohlgestelltheit in $H^1(\mathbb{R}^N)$, insbesondere $g(u) = \lambda|u|^\alpha u$ (Theoreme 3.3.9 und 4.3.1, Corollary 4.3.4), kritischer Fall (Theorem 4.5.1)

[C], Kap. 4.3 (S.92–93), Kap. 3.3 (S. 71–73), Kap. 4.5 (S. 103)

10. **Nichtlineare Wellengleichung I** (EW)

Energieerhaltung und endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, Existenztheorie für quasilineare Wellengleichungen

[E], Kap. 12.1, Kap. 12.2

11. **Nichtlineare Wellengleichung II** (EW)

Existenz für subkritische und kritische semilineare Wellengleichungen

[E], Kap. 12.3, Kap. 12.4

12. **Nichtlineare Wellengleichung III** (EW)

Nichtexistenz

[E], Kap. 12.5